Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

Yrd. Doç. Dr. A. Talha YALTA

Ekonometri 2 Ders Notları

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011

Ders Planı

1. Dizey Yaklaşımı ile Doğrusal Bağlanım Modeli
   - k Değişkenli Modelin Dizey Gösterimi
   - KDBM Varsayımlarının Dizey Gösterimleri
2. Dizey Yaklaşımı ile Tahmin Sorunu
   - SEK Tahmincilerinin Bulunması
   - Varyans-Kovaryans Dizeyi
3. Dizey Yaklaşımı ile Çıkarsama Sorunu
   - Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları
   - Varyans Çözümlemesi ve F Sınamaları
   - Dizey Gösterimi ile Kestirim

Ders Planı

Dizey Yaklaşımının Önemi

- Y bağımlı değişkeni ile $(k-1)$ sayıda açıklayıcı değişken $(X_2, X_3, \ldots, X_k)$ içeren k değişkenli doğrusal bağlanım modelini ele almak için en doğru yaklaşım dizey cebiridir.
- Dizey cebirinin "sayıl" (scalar) cebirine üstünlüğü, herhangi bir sayıda değişken içeren bağlanım modellerini ele alıştaki yalın ve öz yaklaşımıdır.
- k değişkenli model bir kez kurulduktan ve dizey cebiri ile çözüldükten sonra bu çözüm çok sayıda değişkene kolaylıkla uygulanabilir.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- *k* değişkenli anakütle bağlanım işlevini anımsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- Burada *i* örneklem büyüklüğü olduğuna göre, elimizdeki ABİ şu *n* sayıdaki eşanlı denklemin kısa yazılışıdır:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} & + & u_1 \\ Y_2 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} & + & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \ddots \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} & + & u_n \end{array}$$

- Yukarıdaki denklem setini şöyle de gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca $\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times 1} + \mathbf{u}_{n\times 1}$.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- **X**, **Y**, **B** ve **u**'nun boyutlarının karışıklığa yol açmayacağı durumda, doğrusal bağlanım modelinin dizey gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$$

- Burada
  Y bağımlı değişken gözlemlerinin $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,
  X X_2'den X_k'ye kadar olan $k - 1$ değişkenin n sayıdaki gözleminin $n \times k$ boyutlu dizeyini,
  B $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ anakütle katsayılarının $k \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,
  u ise u_i "bozukluk" (disturbance) teriminin $n \times 1$ boyutundaki sütun yöneyini

  göstermektedir.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- Örnek olarak daha önce incelemiş olduğumuz iki değişkenli tüketim-gelir modelinin dizey yaklaşımı ile gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca şöyle yazılabilir:

$$\mathbf{Y}_{10\times 1} = \mathbf{X}_{10\times 2}\mathbf{B}_{2\times 1} + \mathbf{u}_{10\times 1}$$

1. Varsayım

Dizey cebiri yaklaşımı, önceden görmüş olduğumuz klasik doğrusal bağlanım modeli (KDBM) varsayımlarını incelemede büyük kolaylık sağlamaktadır.
Şimdi bu beş varsayımı dizey yaklaşımı ile ele alalım:

1. Varsayım

u bozukluk yöneyinin tüm öğeleri için beklenen değer sıfırdır.
Kısaca hata teriminin beklenen değeri sıfırdır: $E(\mathbf{u}) = 0$.

- Daha açık olarak $E(\mathbf{u}) = 0$ şu demektir:

$$E\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Varsayım

2. Varsayım

u_i hataları, sıfır ortalama ve sabit bir varyans ile normal dağılırlar: $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$.

- **u** burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, **0** ise aynı boyutlu bir boş yöneydir.
- Bu varsayım, bağlanımın tahmin edilmesinden sonra çeşitli önsav sınamalarının yapılabilmesi için gereklidir.

3. Varsayım

3. Varsayım

Hatalar arasında özilinti yoktur: $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2\mathbf{I}$.

- Bu varsayımın daha önce sayısal olarak ele alınan üç varsayımın kısa ve öz anlatımı olduğu şöyle gösterilebilir:

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

(...devam)

3. Varsayım

- Dizeyin her bir öğesinin beklenen değerini alalım:

$$E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \dots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & \dots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & \dots & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

- Hata terimi ortalaması sıfır varsayılıdır: $E(u_i) = \mu = 0$
- Varyans ve kovaryansın formüllerini anımsayalım:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu^2, \qquad \text{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

- Bu durumda, u_i hatalarının "varyans-kovaryans dizeyi" (variance-covariance matrix) üçüncü varsayıma göre şöyle olmalıdır:

$$E(\mathbf{uu}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}$$

4. Varsayım

4. Varsayım

$n \times n$ boyutlu $\mathbf{X}$ dizeyi olasılıksal değildir.

- Diğer bir deyişle $X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}$ değişmeyen sayılardan oluşmaktadır.
- Başta belirtildiği gibi, elimizdeki bağlanım çözümlemesi X değişkenlerinin verili değerlerine bağlı bir koşullu bağlanım çözümlemesidir.

5. Varsayım

5. Varsayım

$\mathbf{X}$'in derecesi k'dir: $\rho(\mathbf{X}) = k$. k burada $\mathbf{X}$'in sütun sayısı olup, gözlem sayısı n'den küçüktür.

- Diğer bir deyişle, X değişkenleri arasında tam bir doğrusal ilişki ya da "çoklueşdoğrusallık" (multicollinearity) yoktur.
- Eğer bu varsayım gerçekleşmez ise, bağlanıma ait $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ dizeyinin belirleyeni sıfır olur ve çözümlemede gerekli olan tersi bulunamaz.

Ders Planı

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- **B** yöneyini tahmin etmek için sıradan enküçük kareler (SEK) ya da ençok olabilirlik (EO) gibi farklı yaklaşımlar kullanılabildiğini biliyoruz.
- Biz dikkatimizi SEK yöntemi üzerinde toplayacağız.
- Bağlanımın SEK tahminini bulmak için önce k değişken içeren örneklem bağlanım işlevini yazalım:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i$$

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- ÖBİ'yi dizey gösterimiyle açık olarak şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} + \hat{\mathbf{u}}_{n\times 1}$$

- Bilindiği gibi SEK tahmincileri hata kareleri toplamının enazlanması yolu ile bulunmaktadır.
- Öyleyse yukarıdaki eşitliği şu şekilde de yazabiliriz:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$$

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- Hata kareleri toplamının aşağıdaki gösterim biçimine dikkat edelim:

$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \hat{u}_1{}^2 + \hat{u}_2{}^2 + \cdots + \hat{u}_n{}^2 = \sum \hat{u}_i{}^2$$

- Buna göre $\mathbf{u}'\mathbf{u}$'nun dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

- Dikkat: Burada $\mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ bir sayıl olduğu için, kendi devriği olan $\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$'ye eşittir.

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ eşitliğini enazlamak için, bu eşitliğin $\hat{\mathbf{B}}$'ya göre kısmi türevini alır ve sıfıra eşitleriz.
- Bu işlem bize "normal denklemler" (normal equations) denilen *k* bilinmeyenli *k* eşanlı denklemi verir:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\beta}_1 n + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} &=& \sum Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum X_{2i}X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{2i}X_{ki} &=& \sum X_{2i}Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{3i}X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{3i}X_{ki} &=& \sum X_{3i}Y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum X_{ki}X_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum X_{ki}X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 &=& \sum X_{ki}Y_i
\end{array}$$

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- Yukarıdaki denklem takımının dizey gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \dots & X_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{k\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} = \mathbf{X}'_{k\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$ diye yazılır.

SEK Tahmincilerinin Bulunması

Normal denklemlerin dizey gösteriminde yer alan aşağıdaki $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyi önemlidir.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

Bu dizeyin şu üç özelliğine dikkat edelim:

1. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyi $k \times k$ boyutundadır ve olasılıksal değildir.
2. Asal köşegen öğeleri ham kare toplamlarını, köşegen dışı öğeler ise ham çapraz çarpım toplamlarını gösterir.
3. $X_{2i}X_{3i}$ çapraz çarpımı $X_{3i}X_{2i}$ çapraz çarpımına eşit olduğu için dizey bakışımlıdır.

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- Sonuç olarak, k değişkenli modelin SEK tahmincilerini elde etmek için normal denklemlerin dizey gösterimini yazalım:
$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$
- Eğer $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyinin tersi varsa, yukarıdaki denklemin her iki yanını bu ters dizeyle önden çarparak şunu bulabiliriz:
$$\begin{aligned} (\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ \mathbf{I}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$
- Buna göre SEK kuramının temel denkleminin dizey gösterimi şudur:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Yukarıdaki eşitlik, eldeki verilerden $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin nasıl tahmin edileceğini gösterir.

Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Herhangi bir $\hat{\beta}_i$ varyansı yanında tüm $\hat{\beta}_i$ ve $\hat{\beta}_j$'lar arasındaki kovaryansları dizey yöntemi ile kolayca gösterebiliriz.
- Bu varyans ve kovaryanslar çeşitli istatistiksel çıkarsama işlemleri için önemlidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$'nın "varyans-kovaryans dizeyi" (variance-covariance matrix) şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = E\left([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]'\right)$$

- Buna göre varcov($\hat{\mathbf{B}}$) aslında şu dizeydir:

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \ldots & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \text{var}(\hat{\beta}_2) & \ldots & \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \ldots & \text{var}(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

varcov(**B**) Dizeyinin Türetilmesi

- varcov($\hat{\mathbf{B}}$)'yı türetmede $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$ eşitliğinden yararlanılır.

Üsttekini $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ temel denkleminde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{XB} + \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{XB} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ &= \mathbf{B} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

Demek ki $\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$. varcov($\hat{\mathbf{B}}$) varyans-kovaryans dizeyi ise tanım gereği şöyledir:

$$\begin{aligned}\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= E([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]') \\ &= E\left([(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'\right) \\ &= E\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)\end{aligned}$$

- X'lerin olasılıksal olmadığına dikkat edilerek şu bulunabilir:

$$\begin{aligned}\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned}$$

- Dikkat: Yukarıda $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2\mathbf{I}$ varsayımı kullanılmıştır.

Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Türetilmesinden de anlaşılacağı gibi varyans-kovaryans dizeyi aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

Varyans-kovaryans Dizeyi

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}$$

- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}$ burada $\hat{\mathbf{B}}$ SEK tahmincilerini veren eşitlikte yer alan ters dizeydir.
- σ^2 ise u_i'nin sabit varyansıdır. Uygulamada σ^2 yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.
- k değişkenli durumda $\hat{\sigma}^2$ aşağıdaki eşitlikten bulunabilir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k}$$

Varyans-kovaryans dizeyi

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$, ilke olarak tahmin edilen kalıntılardan bulunabilse de uygulamada şu yolla doğrudan hesaplanabilir:
$$\sum \hat{u}_i^2 = \text{KKT} = \text{TKT} - \text{BKT}$$
- Toplam kareleri toplamı aşağıdaki şekilde gösterilir:

Toplam kareleri toplamı

$$\sum \hat{y}_i^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

- $n\bar{Y}^2$ terimi burada ortalamadan sapma kareleri toplamının bulunması için gereken düzeltme terimidir.
- Bağlanım kareleri toplamının dizey gösterimi ise şöyledir:

Bağlanım kareleri toplamı

$$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum y_i x_{ki} = \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Kalıntı kareleri toplamı KKT ise TKT ve BKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

Kalıntı kareleri toplamı

$$\begin{aligned} \text{KKT} &= \text{TKT} - \text{BKT} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) - (\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ bulunduktan sonra $\hat{\sigma}^2$'yi kolayca hesaplayabiliriz.
- $\hat{\sigma}^2$'yi hesapladıktan sonra ise varyans-kovaryans dizeyini tahmin edebiliriz.

SEK Tahmincilerinin Özellikleri

- SEK tahmincilerinin en iyi doğrusal yansız tahminci ya da kısaca "EDYT" (BLUE) olduklarını biliyoruz.
- Bu özellik elbette dizey yaklaşımıyla bulunan $\hat{\mathbf{B}}$ için de geçerlidir.
- Buna göre $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin her bir öğesi bağımlı değişken Y'nin doğrusal işlevidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$ yansızdır. Diğer bir deyişle tüm öğelerinin beklenen değeri öğenin kendisine eşittir: $E(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}$.
- SEK tahmincisi $\hat{\mathbf{B}}$, tüm $\mathbf{B}$ tahmincileri içinde en iyi, enaz varyanslı tahmincidir.

Belirleme Katsayısının Dizey Gösterimi

- Belirleme katsayısı R^2'yi daha önce şöyle tanımlamıştık:

$$R^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}}$$

- Buna göre belirleme katsayısının dizey gösterimi de şöyledir:

$$R^2 = \frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}$$

İlinti Dizeyi

- Dizey yaklaşımında, k değişkenli durum için, değişkenler arasındaki sıfırıncı dereceden ilinti katsayılarını veren "ilinti dizeyi" (correlation matrix) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & r_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Burada 1 alt imi bağımlı değişken Y'yi gösterir. Örnek olarak, Y ile X_2 arasındaki ilinti katsayısı r_{12}'dir.
- Asal köşegen üzerindeki 1'ler ise bir değişkenin kendisiyle olan ilinti katsayısının her zaman 1 olmasındandır.
- İlinti dizeyi **R** kullanılarak birinci dereceden ve daha yüksek dereceden ilinti katsayılarını da elde etmek olasıdır.

Ders Planı

Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları

- Tahmin sonrasında çıkarsama yapabilmek için, u_i hatalarının sıfır ortalama ve sabit varyans σ^2 ile normal dağıldıklarını varsayıyoruz:

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise boş yöneydir.
- Buna göre, SEK tahmincileri $\hat{\beta}_i$'lar da aşağıda gösterilen şekilde normal dağılırlar:

$$\hat{\mathbf{B}} \sim N[\mathbf{B}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

- Demek ki $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi, gerçek $\mathbf{B}$ öğesiyle eşit ortalama ile ve $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ters dizeyinin asal köşegenindeki uygun öğe çarpı σ^2'ye eşit varyans ile normal dağılmaktadır.
- $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$'in varyans-kovaryans dizeyi olduğuna dikkat ediniz.

Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları

- Uygulamada σ^2 bilinmediği için t dağılımına geçilir ve $\hat{\sigma}^2$ tahmincisi kullanılır.
- Bu durumda $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi $n-k$ sd ile t dağılımına uyar:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\text{öh}(\hat{\beta}_i)}$$

- $\hat{\beta}_i$ burada $\hat{\mathbf{B}}$'nın bir öğesidir.
- Demek ki t dağılımını kullanarak herhangi bir $\hat{\beta}_i$'nın güven aralığını bulmak ve çeşitli sınamaları yapmak olanaklıdır.

Varyans Çözümlemesinin Dizey Gösterimi

- Tüm bağlanım katsayılarının eşanlı olarak sıfıra eşit olduğu önsavını sınamak ya da bir değişkenin ek katkısını ölçmek için VARÇÖZ yönteminin kullanıldığını anımsayalım.
- TKT, BKT ve KKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bir VARÇÖZ çizelgesi düzenlenebilir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$k-1$	$\frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	$n-k$	$\frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Buna göre:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)/(k-1)}{(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})/(n-k)}$$

Varyans Çözümlemesinin Dizey Gösterimi

- F ve R^2 değerlerinin yakın ilişkili olduğunu biliyoruz.
- Buna göre VARÇÖZ çizelgesinin R^2 gösterimi de şöyledir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$k-1$	$\frac{R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}-n\bar{Y}^2)}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$n-k$	$\frac{(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}-n\bar{Y}^2)}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Demek ki:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

- Bu gösterimin üstünlüğü, tüm hesaplamaların yalnız R^2 ile yapılabilmesi ve sadeleştirme sonrası ortadan kalkacak olan $(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$ terimiyle ilgilenmeye gerek kalmamasıdır.

F Sınamasının Dizey Gösterimi

- Genel olarak, F sınamasının amacı bir ya da birden fazla anakütle katsayısı üzerine konulan doğrusal sınırlamaları sınamaktır.
- Bu sınamanın dizey karşılığını türetebilmek için aşağıdaki tanımlardan yararlanalım:

$\hat{\mathbf{u}}_S$	: Sınırlamalı SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}_{SM}$	: Sınırlamasız SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}'_S\hat{\mathbf{u}}_S = \sum \hat{u}_S^2$	: Sınırlamalı bağlanıma ait KKT
$\hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM} = \sum \hat{u}_{SM}^2$	: Sınırlamasız bağlanıma ait KKT
m	: Doğrusal sınırlama sayısı
k	: Sabit terim dahil anakütle katsayılarının sayısı
n	: Gözlem sayısı

F Sınamasının Dizey Gösterimi

- Genel F sınamasının dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{u}}'_S\hat{\mathbf{u}}_S - \hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM})/m}{(\hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM})/(n-k)}$$

- Yukarıda gösterilen istatistik, m ve $(n-k)$ serbestlik derecesi ile F dağılımına uyar.
- Hesaplanan F değeri eğer kritik F değerinden büyükse, sınırlamalı bağlanım sıfır önsavı reddedilir.

Dizey Gösterimi ile Kestirim

- Tahmin edilen bir bağlanım işlevi, belli bir X_0 değerine karşılık gelen Y'yi kestirmek için kullanılabilir.
- İki türlü kestirim vardır: "Ortalama kestirimi" (mean prediction) ve "bireysel kestirim" (individual prediction).
- Ortalama kestirimi, seçili X_0 değerlerine bağlanım doğrusu üzerinde yakıştırılan noktanın tahmin edilmesi demektir.
- Bireysel kestirim ise X_0'ın karşılığı olan Y değerinin kendisidir.
- Bu iki kestirim biçimi de $\hat{Y}$ için aynı nokta tahmini verir.
- Diğer yandan bireysel kestirimin varyansı, ölçünlü hatası ve bunlara bağlı olarak da güven aralığı ortalama kestirime göre daha yüksektir.

Ortalama Kestiriminin Dizey Gösterimi

- Ortalama kestirimini dizey cebiri ile göstermek için, tahmin edilen çoklu bağlanımın sayıl gösterimini anımsayalım:
$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$
- Yukarıdaki eşitliğin dizey gösterimi kısaca şöyledir:
$$\hat{Y}_i = \mathbf{x}'_i \hat{\mathbf{B}}$$
- $\mathbf{x}'_i = [1, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}]$ burada bir satır yöneyidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$ ise tahmin edilen β'ları gösteren bir sütun yöneyidir.
- Buna göre, verili bir $\mathbf{x}'_0 = [1, X_{20}, X_{30}, \ldots, X_{k0}]$ yöneyine karşılık gelen $\hat{Y}_0$ ortalama kestirimi aşağıdaki biçimi alır:

$$(\hat{Y}_0 | \mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}$$

- Burada $\mathbf{x}_0$'lar verili değerlerdir.
- Ortalama kestirimi ayrıca yansızdır: $E(\mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}$.

Ortalama Kestiriminin Varyansı

- Ortalama kestiriminin varyansı ise şöyledir:

$$\mathrm{var}(\hat{Y}_0|\mathbf{x}'_0) = \sigma^2\mathbf{x}'_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}'_0$$

- $\mathbf{x}'_0$ burada kestirim yapmada kullanılan X değişkenlerinin verili değerlerini içeren satır yöneyidir.
- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ise çoklu bağlanım tahmininde kullanılan dizeydir.
- Uygulamada, hata teriminin sabit varyansı σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ koyularak formül şu şekilde yazılır:

$$\mathrm{var}(\hat{Y}_0|\mathbf{x}'_0) = \hat{\sigma}^2\mathbf{x}'_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}'_0$$

- Yukarıdaki eşitlik kullanılarak, $\mathbf{x}'_0$ veriliyken $\hat{Y}_0$ ortalama kestiriminin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı bulunabilir.

Bireysel Kestirimin Dizey Gösterimi

- Y'nin bireysel kestirimi $(Y_0|\mathbf{x}'_0)$, ortalama kestirimi $(\hat{Y}_0|\mathbf{x}'_0)$ ile aynıdır:

$$(Y_0|\mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0\hat{\mathbf{B}}$$

- Diğer yandan, bireysel kestirimin varyansı ortalama kestiriminin varyansından daha büyüktür:

$$\mathrm{var}(Y_0|\mathbf{x}'_0) = \hat{\sigma}^2[1 + \mathbf{x}'_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}'_0]$$

- $\mathrm{var}(Y_0|\mathbf{x}'_0)$ burada $E[Y_0 - \hat{Y}_0|X]^2$ demektir.
- Uygulamada, ortalama kestiriminde olduğu gibi, σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan Appendix C “The Matrix Approach to Linear Regression Model” okunacak.

Önümüzdeki Ders

Çokluеşdoğrusallık