


Dizely Cebirinin Gözden Geçirilmesi

Yrd. Doç. Dr. A. Talha YALTA
Ekonometri 2 Ders Notları
Sürüm 2,0 (Ekim 2011)



Açık Lisans Bilgisi

İşbu belge, “Creative Commons Attribution-Non-Commercial ShareAlike 3.0 Unported” (CC BY-NC-SA 3.0) lisansı altında bir açık ders malzemesi olarak genel kullanıma sunulmuştur. Eserin ilk sahibinin belirtilmesi ve geçerli lisansın korunması koşulu ile özgürce kullanılabilir, çoğaltılabilir ve değiştirilebilir. Creative Commons örgütü ve “CC-BY-NC-SA” lisansı ile ilgili ayrıntılı bilgi “<http://creativecommons.org>” adresinde bulunmaktadır. Ekonometri ders notlarımın güncel sürümüne “<http://yalta.etu.edu.tr>” adresinden ulaşabilirsiniz.

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 

Ders Planı

- 1 Dizelere İlişkin Temel Kavramlar
 - Tanımlar
 - Dizely Türleri
- 2 Dizely İşlemleri
 - Temel İşlemler
 - Belirleyen ve Dizely Tersiy Alınması

Ders Planı

1 Dizelere İlişkin Temel Kavramlar

- Tanımlar
- Dizely Türleri

2 Dizely İşlemleri

- Temel İşlemler
- Belirleyen ve Dizely Tersiy Alınması

Dizely

- Dizely cebiri kullanmaksızın k değişkenli bir bağlanım modeliyle uğraşmak son derece karmaşık bir iştir.
- Burada, doğrusal bağlanım modelini dizely yaklaşımı ile ele alabilmek için gerekli temel altyapı sunulacaktır.

Dizely

$M \times N$ boyutlu bir “dizely” (matrix), M satır ve N sütun biçiminde düzenlenmiş sayılar ya da öğelerin dikdörtgen bir dizgesidir.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- a_{ij} burada \mathbf{A} dizelyinin i 'nci satırı ve j 'nci sütununda görülen öğeyi anlatmaktadır.

Sayı

- 2×3 boyutundaki bir dizelye örnek:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sayı

“Sayı” (scalar), tek bir gerçek sayıdır ve 1×1 boyutunda bir dizely kabul edilir.

- Sayıya örnek:

$$\mathbf{B}_{1 \times 1} = [5]$$

Satır ve Sütun Yöneylei

Sütun Yöneylei

Tek bir sütunu ve M sayıda satırı olan dizeye “**sütun yöneylei**” (column vector) denir.

Satır Yöneylei

Tek bir satırı ve N sayıda sütunu olan dizeye “**satır yöneylei**” (row vector) denir.

- Sütun yöneyleine örnek:

$$\mathbf{A}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Satır yöneyleine örnek:

$$\mathbf{B}_{1 \times 4} = [1 \quad 2 \quad 5 \quad -4]$$

Altdizely

Altdizely

$M \times N$ boyutundaki bir **A** dizelyinin r sayıda satırı ile s sayıda sütununun dışındaki tüm öğeleri silinirse elde edilen $r \times s$ boyutlu dizely, **A**'ya ait bir “altdizely” (submatrix) olur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen **A** dizelyinin üçüncü satırıyla ikinci sütununu silersek **A**'nın 2×2 boyutundaki bir **B** altdizelyini bulmuş oluruz:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Kare Dizay ve Köşegen Dizay

Kare Dizay

Satır sayısı sütun sayısı ile aynı olan dizeye “**kare dizay**” (square matrix) denir.

Köşegen Dizay

Asal (sol üst köşeden sağ alt köşeye uzanan) köşegeninde en az bir sıfırdan farklı öğe bulunan ve bu köşegen dışı tüm öğeleri sıfır olan dizeye “**köşegen dizay**” (diagonal matrix) denir.

- Kare dizayye örnek:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Köşegen dizayye örnek:

$$\mathbf{B}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sayı Dizey ve Birim Dizey

Sayı Dizey

Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi aynı olan köşegen dizeye “**sayıl dizey**” (scalar matrix) denir.

Birim Dizey

Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi 1 olan köşegen dizeye “**birim dizey**” (identity matrix) denir ve **I** ile gösterilir.

- Sayıl dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

- Birim dizeye örnek:

$$\mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bakışimli Dizay ve Eşit Dizayler

Bakışimli Dizay

Asal köşegeni üzerindeki öğeleri, asal köşegeni altındaki öğelerinin bakışımı olan dizeye “**bakışimli dizay**” (symmetric matrix) denir. Devriği kendisine eşittir.

Eşit Dizayler

A ve **B** gibi iki dizayın boyutları aynıysa ve karşılıklı öğeleri birbirine eşitse ($a_{ij} = b_{ij}$), bu dizayler eşittir.

- Bakışimli dizay örneği:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

- Eşit dizaylere örneği:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Boş Dizely ve Boş Yöneey

Boş Dizely

Bütün öğeleri sıfır olan dizelye “boş dizely” (null matrix) denir ve $\mathbf{0}$ ile gösterilir.

Boş Yöneey

Bütün öğeleri sıfır olan satır ya da sütun yöneyine “boş yöney” (null vector) denir ve $\mathbf{0}$ ile gösterilir.

- Boş dizelye örnek:

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Boş yöneye örnek:

$$\mathbf{0}_{1 \times 4} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Ders Planı

- 1 Dizelere İlişkin Temel Kavramlar
 - Tanımlar
 - Dizely Türleri
- 2 Dizely İşlemleri
 - Temel İşlemler
 - Belirleyen ve Dizely Tersli Alınması

Dizey Toplamı ve Farkı

Dizey Toplaması ve Çıkarması

A ve **B** dizyelerinin toplamı ya da farkı, karşılıklı öğelerinin toplamı ya da farkı alınarak elde edilir. Bu dizyelerin toplama ya da çıkarma için uyumlu olabilmeleri için boyutları aynı olmalıdır.

- Dizey toplamasına örnek:

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} + \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Dizely Çarpımı

Bir Dizely Bir Sayı ile Çarpımı ya da Bölümü

Bir **A** dizelyni $\lambda \in \mathbb{R}$ sayılı ile çarpmak ya da bölmek için, dizelyin bütün öğeleri λ ile çarpılır ya da $\lambda \neq 0$ 'a bölünür.

Dizelyler Çarpımı

Boyutu $M \times N$ olan **A** ve boyutu $N \times P$ olan **B** dizelylerinin **AB** çarpımı, $M \times P$ boyutunda ve aşağıdaki gibi bir **C** dizelyi olur.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \quad i = \{1, 2, \dots, M\} \quad j = \{1, 2, \dots, P\}$$

- Diğer bir deyişle **C**'nin i 'inci satır ve j 'inci sütun öğesi, **A**'nın i 'inci satırındaki öğelerinin **B**'nin j 'inci sütunundaki karşılıklı öğeleri ile çarpılıp, çarpımların toplanması ile bulunur.

Dizelyler Çarpımının Özellikleri

Dizelyler çarpımı işlemleri aşağıdaki özellikleri taşıyır:

① Dizely çarpımı değişmeli olmak zorunda değildir. Kısaca dizelylerin çarpım sıralaması önemlidir: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

② \mathbf{AB} ve \mathbf{BA} 'nın sonuç dizelyleri aynı boyutta olmayabilir:

$$\mathbf{A}_{K \times L} \mathbf{B}_{L \times K} = \mathbf{C}_{K \times K} \qquad \mathbf{B}_{L \times K} \mathbf{A}_{K \times L} = \mathbf{D}_{L \times L}$$

③ $\mathbf{A}_{1 \times K}$ satır yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{K \times 1}$ sütun yöneyi bir sayıl olur.

④ $\mathbf{A}_{K \times 1}$ sütun yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{1 \times K}$ satır yöneyi bir dizely olur.

⑤ Dizely çarpımı birleştiricidir: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

⑥ Dizely çarpımı toplama bakımından dağıtıcıdır:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Dizely Devriği Alma

Dizely Devriği Alma

$M \times N$ bir \mathbf{A} dizelyinin \mathbf{A}' ile gösterilen “devriği” (transpose), \mathbf{A}' ’nin satır ve sütunlarına yer değiştirterek, yani \mathbf{A}' ’nin i ’inci satırını \mathbf{A}' ’nün i ’inci sütunu yaparak elde edilen $N \times M$ dizelyidir.

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}'_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bir satır yöneyinin devriği sütun yöneyi olup, bir sütun yöneyinin devriği de satır yöneyidir.

Devrik Dizelyin Özellikleri

Devrik dizely dönüşümünün bazı özellikleri şunlardır:

1 Devrik bir dizelyin devriği ilk dizelydir: $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$

2 İki dizely toplamının devriği, devriklerin toplamıdır:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

3 Dizely çarpımının devriği, bu dizelylerin devriklerinin ters sırada çarpımıdır: $(\mathbf{ABCD})' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$

4 Birim dizely \mathbf{I} 'nin devriği kendisidir: $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$

5 Bir sayılın devriği kendisidir. λ bir sayıl olsun: $\lambda' = \lambda$

6 λ bir sayıl olsun: $(\lambda\mathbf{A})' = \lambda\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\lambda = \mathbf{A}'\lambda'$

7 \mathbf{A} dizely eğer $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ olacak şekilde kare dizelyse, \mathbf{A} bakışimli bir dizely olur.

Bir Dizelyin Belirleyeni

- Her kare dizely **A** için, **belirleyen** (determinant) diye bilinen ve $|A|$ şeklinde gösterilen bir sayı vardır.
- Bir dizelyin belirleyeninin hesaplanması, iyi tanımlı bir dizi işlem ile gerçekleştirilir.
- Örnek olarak 2×2 boyutundaki bir dizelyin belirleyeni, asal köşegen üzerindeki öğelerin çarpımından diğer köşegen öğelerinin çarpımının çıkartılması ile bulunur.
- Herhangi bir derecedeki belirleyenin açılımında, terimler dönüşümlü olarak $+$ ve $-$ işaret alırlar.
- 3×3 bir belirleyenin açılımında 6 terim bulunur. Genel olarak, $N \times N$ bir belirleyenin açılımında $N!$ terim vardır.
- Buna göre, 5×5 bir dizelye ait belirleyeninin açılımında $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ terim bulunur.

Belirleyenin Özellikleri

Belirleyenin özellikleri aşağıdaki gibidir:

- 1 Belirleyeni sıfır olan dizelye **“tekil dizely”** (singular matrix) denir. Bir tekil dizelyin tersi bulunamaz.
- 2 **A**'nın herhangi bir satırındaki tüm öğeler sıfırsa, belirleyeni de sıfır olur.
- 3 **A** ile devrik **A**'nın belirleyenleri aynıdır: $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- 4 **A** dizelyinin herhangi iki satır ya da sütunu yer değiştirirse, $|\mathbf{A}'|$ 'nın işareti değişir.
- 5 **A**'nın iki satır ya da sütunu aynıysa, belirleyeni sıfır olur.
- 6 **A**'nın bir satır ya da sütunu başka bir satır ya da sütununun bir katı ya da doğrusal bir birleşimiyse, belirleyeni sıfırdır.
- 7 **A**'nın bir satır ya da sütunundaki tüm öğeler bir λ sayılı ile çarpılırsa, $|\mathbf{A}'|$ da λ ile çarpılır.
- 8 İki dizelyin çarpımının belirleyeni dizelylerin ayrı ayrı belirleyenlerinin çarpımına eşittir: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

Bir Dizelyin Derecesi

Bir Dizelyin Derecesi

Bir dizelyin “**derecesi**” (rank), belirleyeni sıfır olmayan en büyük alt dizelyinin boyutudur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen dizelyin 1. satırının 2. ve 3. satırların doğrusal bir birleşimi olduğu görülmektedir:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Buna göre, \mathbf{A} tekil bir dizeldir ve $|\mathbf{A}| = 0$ olmaktadır.
- Diğer taraftan, \mathbf{A} 'nın derecesi 2'dir çünkü 2×2 boyutlu altdizelylerinden birinin belirleyeni sıfırdan farklıdır:

$$\mathbf{B}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Minör

Minör

$N \times N$ boyutundaki bir \mathbf{A} dizeyinin i 'nci satırı ile j 'nci sütunu silinirse, kalan altdizeyin belirleyene a_{ij} öğesinin “minörü” (minor) denir ve $|\mathbf{M}_{ij}|$ ile gösterilir.

- Örnek olarak aşağıda verilen dizeyi ele alalım:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Burada a_{11} 'in minörü şudur:

$$|\mathbf{M}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

Eşçarpan Dizely ve Ek Dizely

Eşçarpan

$N \times N$ boyutlu bir \mathbf{A} dizelyinin a_{ij} öğesinin “eşçarpanı” (cofactor) şöyle tanımlanır: $c_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{M}_{ij}|$

- Bir başka deyişle eşçarpan işaretli bir minördür ve işareti de $(i + j)$ toplamı çiftse artı, tekse eksidir.

Eşçarpan Dizely

\mathbf{A} 'nın “eşçarpan dizelyi” (cofactor matrix), a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak elde edilir ve $(\text{cof } \mathbf{A})$ ile gösterilir.

Ek Dizely

“Ek dizely” (adjoint matrix), eşçarpan dizelyinin devriğidir ve $(\text{adj } \mathbf{A})$ ile gösterilir.

Ters Dizely

Dizely Ters Hesaplama

A tekil olmayan ($|\mathbf{A}| \neq 0$) bir dizelyse, \mathbf{A}^{-1} “ters” (inverse) dizelyi şu şekilde bulunur:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\text{adj}\mathbf{A})$$

Dizely tersi hesaplama işleminin adımları aşağıdaki gibidir:

- 1 **A**'nın belirleyeni hesaplanır.
- 2 **A**'nın a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak eşçarpan dizely (cof **A**) elde edilir.
- 3 Eşçarpan dizelyin devriği alınarak ek dizely (adj **A**) bulunur.
- 4 Son olarak ek dizelyin tüm öğeleri $|\mathbf{A}|$ 'ya bölünür.

Dizelerde Türev Alma

Dizelerde türev almaya ilişkin iki önemli kural şunlardır:

- 1 Eğer \mathbf{a}' $1 \times N$ boyutunda bir satır yöneyi ve \mathbf{x} de $N \times 1$ boyutlu bir sütun yöneyi ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

- 2 Eğer \mathbf{A} $N \times N$ boyutunda bir kare dizelyse, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan **Appendix B** “Rudiments of Matrix Algebra” okunacak.

Önümüzdeki Ders

Doğrusal Bağlanım Modeline Dizely Yaklaşımı