

Ad, Soyad: _____

Açıklama ve uyarılar: Bu sınav toplam 100 puan değerinde 3 sorudan oluşmaktadır. Sınav süresi 90 dakikadır ve tüm soruların yanıtlanması gereklidir. Birinci soruyu yanıtlamada kullanılabilecek bazı formül ve/veya tanımlar sorulara ek olarak verilmiştir. Tüm işlemler bu sınav kağıdı üzerinde yapılacaktır. Kopya çekme ve çektirme girişiminde bulunanlar hakkında üniversitenin disiplin kuralları çerçevesinde işlem yapılacaktır. Sınav süresince sınav içeriği ile ilgili soru sormak yasaktır.

Sorular

1. (25 puan) Aşağıda verilen varsayımsal veri setini, $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{u}_i$ iki değişkenli bağlantı modeli çerçevesinde ele alalım.

Y_i	X_i
1	0
2	1
3	5
4	6

- (a) (5 puan) Modeli dizey biçiminde gösteriniz.

Yanıt:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{bmatrix}$$

- (b) (10 puan) $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ ve $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ dizelerini bulunuz.

Yanıt:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 62 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 104$$

$$\text{adj}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 62 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{X}'\mathbf{X}|} \times \text{adj}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 62/104 & -12/104 \\ -12/104 & 4/104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 & -0,12 \\ -0,12 & 0,038 \end{bmatrix}$$

(c) (10 puan) \hat{B} yöneyini tahmin ediniz.

Yanıt:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62/104 & -12/104 \\ -12/104 & 4/104 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128/104 \\ 44/104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,23 \\ 0,42 \end{bmatrix}$$

2. (50 puan) 1960–1979 dönemindeki gemi arızalarına ilişkin iki ayrı modele ait tahmin sonuçları aşağıda verilmiştir.

$$\text{Model 1: } Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 D_i + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 (D_i X_{1i}) + \beta_3 X_{2i} + \beta_4 (D_i X_{2i}) + u_i$$

$$\text{Model 2: } Y_i = \lambda_1 + \lambda_2 D_i + \gamma_1 X_{1i} + \gamma_2 (D_i X_{1i}) + v_i$$

Burada:

- Y örneklem dönemi içerisindeki toplam arıza sayısını,
- X_1 geminin kullanımda olduğu toplam ay sayısını,
- X_2 toplam bakım sayısını,
- D 0 ise 1974 öncesi ve 1 ise 1974 sonrası dönem olduğunu

göstermektedir. 15 gözleme dayanan ve SEK ile elde edilmiş bağlanım bulguları şöyledir:

$$\hat{Y}_i = 3,919 - 9,408D_i + 0,04048X_{1i} - 0,3313(D_i X_{1i}) - 0,4725X_{2i} + 3,991(D_i X_{2i})$$

t	(0,925)	(-1,729)	(0,324)	(-1,942)	(-0,315)	(1,949)
-----	---------	----------	---------	----------	----------	---------

$R^2 = 0,8658$

$$\hat{Y}_i = 2,721 - 0,6766D_i + 0,001136X_{1i} + 0,001222(D_i X_{1i})$$

t	(1,361)	(-0,253)	(8,166)	(4,193)
-----	---------	----------	---------	---------

$R^2 = 0,8348$

(a) (5 puan) Birinci ve ikinci modele ait bağlanım sonuçlarını birlikte inceleyerek birinci modelde olası bir çokluşdoğrusallık sorunundan söz edebilir misiniz? Çokluşdoğrusallıktan neden kuşkulandığınızı en çok **iki** tümce ile anlatınız.

Yanıt: Tahmin edilen tüm katsayılar için t oranları ($2t$ kuralına göre) anlamlı değilken, bağlanıma ait yakışmanın derecesini gösteren R^2 değeri oldukça yüksektir. Ayrıca, 1974 sonrası için X_2 'nin katsayısı işareti ($-0,4725 + 3,991 = 3,5185$) de yanlıştır. Dolayısıyla birinci modelde olası bir çokluşdoğrusallık sorunundan söz edebiliriz.

(b) (5 puan) $X_{1i} = a_1 + a_3 X_{2i} + \epsilon_i$ yardımcı bağlanımına ait r^2 değeri 0,999998 olarak bulunmuştur. Bu sonuçtan ne şekilde yararlanabileceğinizi en çok **iki** tümce ile açıklayınız.

Yanıt: Verilen $r^2 = 0,999998$, birinci modele ait $R^2 = 0,8658$ değerinden yüksektir. Bu da modelde yer alan X_1 ve X_2 değişkenleri arasındaki çoklu eşdoğrusallığın dikkate almayı gerektirecek kadar yüksek olduğunun bir göstergesidir.

(c) (5 puan) X_1 ve X_2 değişkenleri arasındaki ilişki bir tam eşdoğrusallık ilişkisi midir? Nedenini en çok **iki** tümce ile açıklayınız.

Yanıt: Hayır değildir. Eğer X_1 ve X_2 arasındaki ilişki tam eşdoğrusallık olsaydı r^2 1'e eşit olurdu. Ayrıca katsayılara ait ölçünlü hatalar 0 olarak bulunur ve t ve p değerleri de hesaplanamazdı.

(d) (10 puan) Birinci modeldeki olası çoklu eşdoğrusallık sorununu gidermek için kullanabileceğiniz **iki** farklı düzeltici yöntem öneriniz. Bu önlemleri kısaca açıklayınız ve uygulama açısından karşılaştırınız.

Yanıt: Kullanabileceğimiz düzeltici önlemlerden bazıları şunlardır:

- *Verileri dönüştürmek:* Eldeki bir zaman serisi bağlanımı olduğu için 1. fark dönüşümünden yararlanılabilir. ΔX_1 ve ΔX_2 arasında eşdoğrusallık görülmeyecektir, ancak böyle bir modelde de hata teriminin özilinti sergilemesi olasıdır.
- *Ek ya da yeni veri derlemek:* Örneklem büyüklüğü artırılarak veya farklı bir örneklem ile varyansların küçülüp güven aralıklarının daralması sağlanabilir, ancak bunu yapabilmek kolay veya olanaklı olmayabilir.
- *Bazı değişkenleri çıkartmak:* Uygulaması kolay olan bu yöntem ile eşdoğrusallığın önüne geçilebilir, ancak dikkatli olunmazsa bu yöntem de model belirtim hatası ve yanlış katsayı tahminlerine yol açabilir.
- *Önsel bilgilerden yararlanmak:* X_1 ve X_2 arasındaki olası bir ilişkiden ya da karma verilerden yararlanarak X_1 veya X_2 'nin bir tahmini elde edilebilir. Bağlanımda bu bilgiyi kullanmak eşdoğrusallık sorununu giderebilse de bu yöntemi uygulayabilmek her zaman olanaklı değildir.

TOBB - Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
İKT352 – Ekonometri II, Ara Sınavı

- (e) (25 puan) Birinci ve ikinci modele dayanan bağlanım bulgularını birlikte ve dikkatli bir şekilde yorumlayınız. Yorumunuzda; modellerde yer alan kukla değişkenleri, önsel beklentilerinizi, olası çoklu eşdoğrusallık sorununu, ikinci modele ait katsayı tahminlerini ve sınav soruları kapsamında yapmış olduğunuz tüm çözümlerini de dikkate alınız.

Yanıt: Gemi arızalarını geminin kullanımda olduğu süre ve toplam bakım sayısı ile açıklamaya çalışan birinci modele ait bulgular, çoklu eşdoğrusallık sorunundan dolayı geçerli değildir. Anlamli olmayan t istatistikleri ile birlikte görülen 0,87 gibi yüksek bir R^2 değeri ve X_2 değişkenine ait katsayının işaretinin yanlış olması gibi göstergeler bu sorunun varlığını ortaya koymaktadır. Ayrıca X_1 'in X_2 'ye göre yardımcı bağlanımından elde edilen $r^2 = 0,999998$ değeri de bu iki değişken arasında ciddi bir eşdoğrusallık olduğunu kanıtlamaktadır.

Birinci modeldeki eşdoğrusallık sorunu, ikinci modelde X_2 değişkeni çıkartılarak aşılabilmiştir. İkinci modele göre, ortalama geminin kullanımda olduğu her $1/0,001136 = 877$ ay (yaklaşık 73 yıl) içerisinde 1 kaza beklenmektedir. 1974 sonrası dönemde ise katsayı 0,002358 olmakta ve yaklaşık 35 yıla ortalama 1 kaza düşmektedir. Geminin kullanım süresi kontrollüken 1974 öncesi ve 1974 sonrası dönemlerdeki gemi kaza sayılarında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık gözlenmemektedir. $R^2 = 0,8348$ değeri verilerin modele yakışma derecesinin oldukça yüksek olduğunu göstermektedir.

3. (25 puan) Aşağıda verilen sınamaların sıfır önsavlarını ve hangi istatistiksel dağılıma dayandıklarını yazınız:
- (a) (5 puan) Park sınavı

Yanıt: t dağılımına dayanır. $H_0 : \hat{\beta} = 0$ (Aynıserpilimsellik)

- (b) (5 puan) Spearman sıra ilintisi sınavı

Yanıt: t dağılımına dayanır. $H_0 : \text{Aynıserpilimsellik}$

- (c) (5 puan) Goldfeld-Quandt sınavı

Yanıt: F dağılımına dayanır. $H_0 : \text{Aynıserpilimsellik}$

- (d) (5 puan) Breusch-Pagan-Godfrey sınavı

Yanıt: χ^2 dağılımına dayanır. $H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$ (Aynıserpilimsellik)

- (e) (5 puan) White sınavı

Yanıt: χ^2 dağılımına dayanır. $H_0 : \text{Aynıserpilimsellik}$

Formüller

Dizay Cebiri ile Doğrusal Bağlanım

n adet gözlem ve Y ile birlikte toplam k de-
ğişken içeren doğrusal bağlanım modelinde:

$$\text{Dizay gösterimi: } \mathbf{Y}_{n \times 1} = \mathbf{X}_{n \times k} \mathbf{B}_{k \times 1} + \mathbf{u}_{n \times 1}$$

$$\text{Katsayı tahminleri: } \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\text{KKT: } \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$$

$$\text{BKT: } \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

$$\text{TKT: } \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

$$u_i \text{ sabit varyansı: } \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k}$$

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\text{Belirleme katsayısı: } R^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - [(1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}]$$

$$\text{Ortalama kestirimi: } (\hat{Y}_0 | \mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}$$

$$\text{var}(\hat{Y}_0 | \mathbf{x}'_0) = \sigma^2 \mathbf{x}'_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}'_0$$

$$\text{Tekil kestirim: } (Y_0 | \mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}$$

$$\text{var}(Y_0 | \mathbf{x}'_0) = \hat{\sigma}^2 [1 + \mathbf{x}'_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}'_0]$$

Tekil olmayan bir \mathbf{A} dizeyinin tersi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (\text{adj}\mathbf{A})$$