

Özilinti


Hatalar İlintili ise Ne Olur?

Yrd. Doç. Dr. A. Talha YALTA
Ekonometri 2 Ders Notları
Sürüm 2,0 (Ekim 2011)



Açık Lisans Bilgisi

İşbu belge, “Creative Commons Attribution-Non-Commercial ShareAlike 3.0 Unported” (CC BY-NC-SA 3.0) lisansı altında bir açık ders malzemesi olarak genel kullanıma sunulmuştur. Eserin ilk sahibinin belirtilmesi ve geçerli lisansın korunması koşulu ile özgürce kullanılabilir, çoğaltılabilir ve değiştirilebilir. Creative Commons örgütü ve “CC-BY-NC-SA” lisansı ile ilgili ayrıntılı bilgi “<http://creativecommons.org>” adresinde bulunmaktadır. Ekonometri ders notlarımın güncel sürümüne “<http://yalta.etu.edu.tr>” adresinden ulaşabilirsiniz.

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 

Ders Planı

- 1 **Özilintinin Niteliği**
 - Özilintinin Nedenleri
 - Özilintinin SEK Tahminlerine Etkisi
- 2 **Özilintiyi Saptamak**
 - Çizim Yöntemi ve Dizilim Sınaması
 - Durbin-Watson d Sınaması
 - Breusch-Godfrey Sınaması
- 3 **Özilintiyi Düzeltmek**
 - ρ Biliniyorsa
 - ρ Bilinmiyorsa

Ders Planı

- 1 Öziliintinin Niteliği
 - Öziliintinin Nedenleri
 - Öziliintinin SEK Tahminlerine Etkisi
- 2 Öziliintiyi Saptamak
 - Çizim Yöntemi ve Dizilim Sınaması
 - Durbin-Watson d Sınaması
 - Breusch-Godfrey Sınaması
- 3 Öziliintiyi Düzeltmek
 - ρ Biliniyorsa
 - ρ Bilinmiyorsa

Özilintinin Niteliği

KDBM'nin önemli bir varsayımı, bağlanım işlevinde yer alan u_i bozuklukları arasında “özilinti” (autocorrelation) olmadığıdır. Ancak bu varsayım her zaman geçerli olmayabilir.

Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

- 1 Özilintinin niteliği nedir?
- 2 Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
- 3 Varlığı nasıl anlaşılabilir?
- 4 Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

Özilintinin Niteliği

- Özilinti, zaman ya da uzay içerisinde dizili gözlem üyeleri arasındaki sıraya dayanan ilişkiyi anlatan bir kavramdır.
- Özilinti aynı yönlü ya da ters yönlü olabilir. Ancak genellikle aynı yönlü olarak görülür.
- Genel olarak özilinti zaman serilerinde görülen bir olgudur. Zaman serilerinde gözlemler zamana göre dizildikleri için, ardışık gözlemler arasında ilişki bulunması olasıdır.
- Yatay kesit verilerinde özilinti görülebilmesi için ise verilerin iktisadi anlamı olan bir şekilde dizilmiş olmaları gereklidir.
- Yatay kesit verilerinde görülen bu tür sıralı ilişkiye “uzaysal özilinti” (spatial autocorrelation) denir.

Özilintinin Niteliği

- Zaman serilerinde gözlenebilen özilintiye örnek olarak, üç aydan uzun süren bir grevin üçer aylık üretim verileri üzerindeki etkisini gösterebiliriz.
- Yatay kesit verilerindeki uzaysal özilintiye örnek olarak ise bir ailenin tüketimindeki artışın, komşusundan geri kalmak istemeyen diğer bir ailenin tüketimini de artırması verilebilir.

Özilitinin Niteliği

- Özilitiyi tanımlayabilmek için, klasik doğrusal bağlanım modelinin varsayımlarından biri olarak u_i bozukluklarının birbirlerinden bağımsız olduğunu anımsayalım:

$$E(u_i u_j) = 0 \quad i \neq j$$

- Öziliti ise herhangi bir gözleme ait hatanın önceki gözleme ait hatadan etkilenmesi durumudur:

$$E(u_i u_j) \neq 0 \quad i \neq j$$

- Demek ki öziliti, ikincisi birincisinin gecikmelisi olan, örnek olarak u_1, u_2, \dots, u_{10} ile u_2, u_3, \dots, u_{11} gibi iki dizi arasındaki ilintiden başka birşey değildir.
- u_1, u_2, \dots, u_{10} ve v_1, v_2, \dots, v_{10} gibi birbirinden farklı iki dizi arasındaki ilişkiye ise “**serisel ilinti**” (serial correlation) adı verilir.

Özilintinin Nedenleri

Özilintinin nedenlerinden bazıları şunlardır:

- 1 Süredurum etkisi
- 2 Dışlanan değişkenler
- 3 Yanlış işlev biçimi
- 4 Örümcek ağı olgusu
- 5 Gecikmeler
- 6 Veri dönüştürmesi
- 7 Durağan-dışılık

Süredurum Etkisi

Neden 1: Süredurum etkisi

Özilintinin en önemli nedeni, iktisadi zaman serilerinde sıkça görülen “**süredurum**” (inertia) ya da ağır hareketliliklerdir.

- Bilindiği gibi GSYH, üretim, işsizlik, fiyat endeksleri gibi zaman serileri çevrimsel dalgalanmalar sergilerler.
- Böyle serilerin doğasında bir ivmelenme bulunur. Önemli bir gelişme oluncaya kadar sürekli bir artma ya da azalma göstermeyi sürdürürler.
- Gözlemler arasındaki süre kısa ise bu durumla daha çok karşılaşılır.

Dışlanan Değişkenler

Neden 2: Dışlanan değişkenler

Eksik bir değişken ya da değişkenlerden kaynaklı bir model belirtim hatası özilintiye neden olabilir.

- Aşağıdaki iki modeli karşılaştıralım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + v_t$$

- Eğer doğru olan model birincisi ise, ikinciye tahmin etmek $v_t = \beta_4 X_{4t} + u_t$ durumuna yol açar.
- Bu durumda v_t hata terimi düzenli bir örüntü yansıtacaktır.
- Kalıntılar arasında gözlenen bu ilişki çoğu zaman dışlanan değişkenin modele alınmasıyla yok olur.

Yanlış İşlev Biçimi

Neden 3: Yanlış işlev biçimi

Yanlış işlev biçimi kullanmak da değişken dışlamak gibi bir model belirtim hatasıdır ve özilintiye yol açabilir.

- X_{2t} üretim ve Y_t de marjinal maliyet olsun. Aşağıdaki iki modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{2t}^2 + u_t$$
$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + v_t$$

- İkinci modeli olarak doğrusal bir ilişki varsaymak, marjinal maliyetin sistematik olarak olduğundan büyük ya da küçük tahmin edilmesine yol açar.
- Bunun nedeni, yanlış belirtilmiş modelde $v_t = \beta_3 X_{2t}^2 + u_t$ eşitliğinin geçerli olmasıdır.

Örümcek Ağı Olgusu

Neden 4: Örümcek ağı olgusu

Öziliti, verilerin “örümcek ağı olgusu” (cobweb phenomenon) denen durumu yansıttığında da ortaya çıkar.

- Örnek olarak, tarım ürünlerinde üretim zaman aldığı için arz fiyata bir dönem gecikmeli tepki verebilir:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + u_t$$

- Eğer t dönemindeki fiyat düşük olursa, çiftçiler $t + 1$ 'de üretimi kısımlırlar ve bu da fiyatların birden yükselmesine yol açabilir.
- Bu böyle sürerek örümcek ağı örüntüsüne yol açar.
- Böyle bir durumda u_t bozukluk terimi de rastsal olmaktan çıkıp düzenli bir yapı sergiler.

Gecikmeler

Neden 5: Gecikmeler

Öziliintinin bir nedeni de modelde yer alan gecikme terimleridir.

- Kimi zaman bağımlı değişkenin önceki bir dönemde aldığı değer, modele açıklayıcı değerşken olarak girebilir.
- Örnek olarak; tüketiciler tüketim alışkanlıklarını psikolojik, teknolojik ve kurumsal nedenlerle hemen değerştirmezler.
- Buna göre bu dönemdeki tüketim, başka etmenlerin yanı sıra bir önceki dönemin “**gecikmeli**” (lagged) tüketimine de bağlı olur:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 C_{t-1} + u_t$$

- Böyle bir bağlanıma “**özbağlanım**” (autoregression) denir.
- Burada eğer gecikme terimi gözardı edilirse, ortaya çıkan hata terimi, gecikmeli tüketimin bugünkü tüketim üzerindeki etkisinden doğan düzenli bir örüntü gösterecektir.

Veri Dönüştürmeleri

Neden 6: Veri dönüştürmeleri

Çeşitli veri dönüştürme işlemleri de özilintiye yol açabilir.

- Birçok görgül çözümlemede verileri dönüştürmek gerekir.
- Örnek olarak, üç aylık zaman serisi verileri aylık verilerin toplanıp üçe bölünmesiyle bulunabilir.
- Bu ortalama alma işlemi ise aylık verilerdeki dalgalanmaları törpüleyerek verilerde bir düzlenme yaratır.
- Böylece üç aylık verileri gösteren çizimler aylık verilere göre daha düz olur.
- Bu düzlenme de bozukluk teriminde düzenli bir örüntüye neden olabilir.
- Bu sorun “içdeğer biçme” (interpolation) ve “dışdeğer biçme” (extrapolation) durumlarında da ortaya çıkabilir.

Durağan-dışılık

Neden 7: Durağan-dışılık

Zaman serilerinde sıkça karşılaşılan ve önemli bir sorun olan “**durağan-dışılık**” (non-stationarity) altında hata terimi özilintilidir.

- Bir zaman serisinin durağan olması seriye ait ortalama, varyans, kovaryans gibi çeşitli özelliklerin zamana göre değişken olmaması demektir.
- Aksi durumda seri “**durağan-dışı**” (non-stationary) olur.
- Bir bağılanım modelinde Y_t ve X_t 'nin durağan-dışı olması ve bu nedenle u_t 'nin de durağan-dışı olması olasıdır.
- Bu durumda hata terimi özilinti sergiler.

Birinci Derece Özbağlanım

- Özilihtinin SEK tahmincileri ve bunların varyansları üzerindeki etkilerini görmek için, iki değişkenli bağlanım modeline dönelim:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Burada zaman serisi verileri kullanıldığına dikkat ediniz.
- Hata terimi ile ilgili baştaki varsayımımızı anımsayalım:

$$E(u_t u_{t+s}) \neq 0, \quad s \neq 0$$

- Bu varsayım çok genel olduğu için, u_t 'yi oluşturan yapı konusunda da bir varsayım yapmamız gerekmektedir.

Birinci Derece Özbağlanım

- Bozukluk teriminin şöyle oluştuğunu varsayalım:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad -1 < \rho < 1$$

- Buradaki ρ terimine “**özkovaryans katsayısı**” (coefficient of autocovariance) ya da “**birinci derece öziliinti katsayısı**” (first order autocorrelation coefficient) denir.
- ϵ_t ise SEK varsayımlarını sağlayan bozukluk terimidir:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ \text{var}(\epsilon_t) &= \sigma^2 \\ \text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t+s}) &= 0 \quad s \neq 0 \end{aligned}$$

- Bu yapıya “**Markov birinci derece özbağlanımsal tasarım**” (Markov first order autoregressive scheme) adı verilir ve AR(1) ile gösterilir.
- Yukarıdaki özellikleri gösteren hata terimine mühendislikte “**beyaz gürültü**” (white noise) de denir.

Birinci Derece Özbağlanım

- Tanımladığımız birinci derece özbağlanımsal diziyi inceleyelim:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

- Yukarıda u_t 'deki değişimin iki farklı parçadan oluştuğu görülmektedir.
- Birinci parça ρu_{t-1} , düzenli bir kaymayı göstermektedir. İkinci parça olan ϵ_t ise tümüyle rastsaldır.
- Bu dizi birinci derece özbağlanımsaldır çünkü yalnızca u_t ve onun bir önceki değeri söz konusudur.
- İkinci derece özbağlanımsal tasarım ya da kısaca AR(2) tasarımı ise şöyle gösterilir:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t$$

AR(1)'in SEK Tahminlerine Etkisi

- Öziliti durumunda β 'ların SEK tahminleri değişmez.
- Ancak, hata terimi AR(1) iken β_2 'nin varyansı şöyle olur:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \left[1 + 2\rho \frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2} + 2\rho^2 \frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2} + \dots + 2\rho^{n-1} \frac{x_1 x_n}{\sum x_t^2} \right]$$

- Bunu özilitinin olmadığı genel formülle karşılaştıralım:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

- Demek ki $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ formülü, bildiğimiz varyans formülüne ρ 'ya dayalı bir terimin eklenmesiyle bulunmaktadır.
- Genel olarak $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ değerinin $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ 'dan büyük mü yoksa küçük mü olacağı önceden bilinemez.

AR(1)'in SEK Tahminlerine Etkisi

- Özilinti varken, SEK tahmincisi $\hat{\beta}_2$ yanında AR(1)'i dikkate alan $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{AR1}$ formülünü kullanmak yeterli değildir.
- $\hat{\beta}_2$ bu durumda doğrusal ve yansız olmaya devam etse de artık enaz varyanslı olmayarak EDYT özelliğini kaybeder.
- Özilinti altında “etkin” (efficient) tahminci, farklı serpilimsellik durumunda olduğu gibi GEK yöntemiyle bulunabilir.

AR(1) Altında EDYT Tahminci

- İki değişkenli modelde ve AR(1) süreci altında, GEK ile bulunan ve EDYT olan tahminci ve bunun varyansı şöyledir:

$$\hat{\beta}_2^{\text{GEK}} = \frac{\sum_{t=2}^n (x_t - \rho x_{t-1})(y_t - \rho y_{t-1})}{\sum_{t=2}^n (x_t - \rho x_{t-1})^2} + C$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_2^{\text{GEK}}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n (x_t - \rho x_{t-1})^2} + D$$

- Buradaki C ve D terimleri, uygulamada gözardı edilebilen düzeltme terimleridir.
- Ayrıca t alt iminin 2'den n 'ye kadar olduğuna dikkat ediniz.
- Demek ki GEK tahmincisi anakütledeki öziliti katsayısı ρ 'yu içerirken, SEK bunu görmezden gelmektedir.
- SEK'in değil de GEK'in EDYT olmasının nedeni sezgisel olarak budur. Eğer $\rho = 0$ ise iki tahminci aynı olur.

AR(1) Altında SEK Kullanmanın Sonuçları

- Öziliti varken, $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{AR1}$ tanımı kullanılsa bile güven aralıkları $\text{var}\hat{\beta}_2^{GEK}$ 'e göre daha geniş olabilir.
- Demek ki öziliti göz önüne alınsa bile SEK süreci GEK'e göre anlamlı bir tahmini anlamsız gösterebilmektedir.
- SEK kullanmakla kalmayıp özilitiyi göz ardı eden sıradan $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ formülünü kullanmanın sonuçları ise daha ciddidir.
- Eğer ρ artı işaretli (u_t 'ler aynı yönlü ilişki içinde) ise, kalıntı varyansı $\hat{\sigma}^2$ gerçek σ^2 'yi olduğundan küçük tahmin eder.
- Aşağı doğru yanlı $\hat{\sigma}^2$ da R^2 'yi olduğundan büyük bulur.
- Ayrıca $\hat{\sigma}^2$ 'daki yanlılık $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ 'ya da aktarılır.
- Bunun sonucunda $\text{var}(\hat{\beta}_2) < \text{var}(\hat{\beta}_2)_{AR1}$ olur ve bildiğimiz t ve F sınamaları geçerliliklerini yitirir.
- Sonuç olarak, SEK tahminçileri yansız ve tutarlı olsalar da öziliti varken SEK değil GEK kullanılmalıdır.

Ders Planı

- 1 Özilitinin Niteliği
 - Özilitinin Nedenleri
 - Özilitinin SEK Tahminlerine Etkisi
- 2 Özilitiyi Saptamak
 - Çizim Yöntemi ve Dizilim Sınaması
 - Durbin-Watson d Sınaması
 - Breusch-Godfrey Sınaması
- 3 Özilitiyi Düzeltmek
 - ρ Biliniyorsa
 - ρ Bilinmiyorsa

Çizim Yöntemi

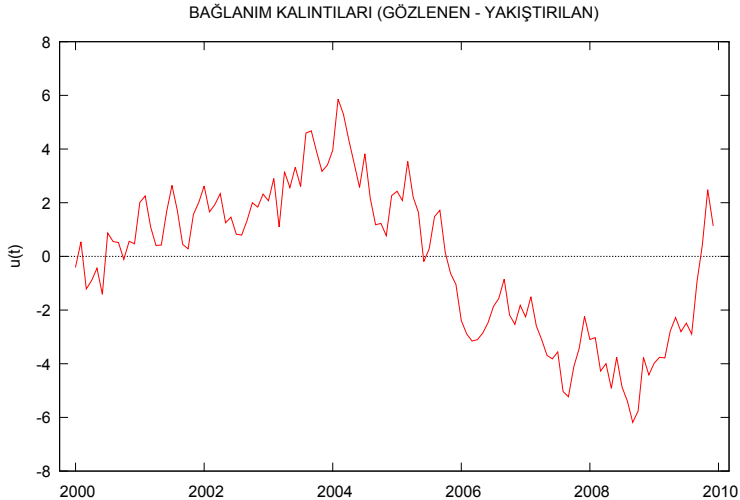
- Özilintinin var olup olmadığını anlamada nitel bir yöntem olan çizim yönteminin yanı sıra çeşitli nicel sınamalardan yararlanılabilir.
- Çizim yöntemi için SEK süreci kullanılır ve elde edilen \hat{u}_t kalıntıları görsel olarak incelenir.
- Tahmin edilen \hat{u}_t 'lar her ne kadar gerçek u_t 'lerle aynı şey değilse de, önemli ipuçları verebilirler.
- Böyle bir görsel inceleme yalnızca özilinti konusunda değil; farklı serpilimsellik, model yetersizliği ve model belirtim yanlışlığı konularında da yararlı bilgiler sağlayabilmektedir.

Çizim Yöntemi

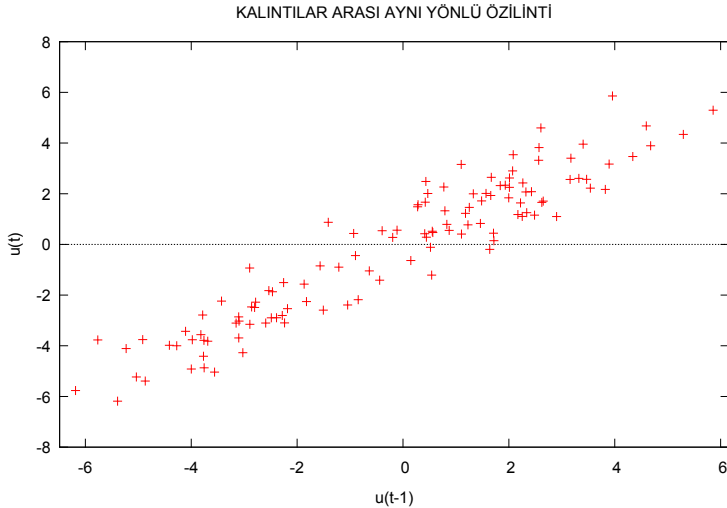
Kalıntıları birkaç farklı şekilde incelemek olasıdır:

- 1 Öncelikli olarak kalıntılar zamana göre çizilebilir. Bu çizime “**zaman dizisi çizimi**” (time sequence plot) denir.
- 2 Almaşık olarak, “**ölçünlü kalıntılar**” (standardized residuals) incelenebilir. Ölçünlü kalıntılar, \hat{u}_t 'ların tahmin edilen ölçünlü hata $\hat{\sigma}$ 'ya bölünmesiyle bulunur. Bunlar saf sayılar oldukları için başka bağlanımlarinkilerle karşılaştırılabilirler. Ortalamaları sıfır, varyansları da birdir.
- 3 Üçüncü olarak, \hat{u}_t 'ların \hat{u}_{t-1} 'ya göre çizimi incelenebilir. Eğer t dönemi kalıntıları $t - 1$ dönemindekilerle düzenli bir ilişki sergiliyorsa, bunların rastsal olmadığı sonucu çıkar.

Özilihtisel Kalıntılara Örnek



Hatalar Arası Aynı Yönlü Özlinti



Dizilim Sınaması

- Kalıntıların rastsal bir sıra izleyip izlemediğini anlamak için “**dizilim**” (runs) sınavasını kullanabiliriz.
- Bu sınav, gözlemlerin içinden seçildiği dağılıma ilişkin herhangi bir varsayım yapmadığı için “**değiştirgesel-dışı**” (non-parametric) bir sınavdır.
- Bu sınavı açıklamak için aşağıdaki kalıntı işaretleri dizilimini ele alalım:

(-----)(+++++)(-)(+)(-----)

- Gözlem sayısı burada $n = 7 + 12 + 1 + 1 + 9 = 30$ 'dur.
- Artı işaretli gözlem sayısı $n_1 = 13$, eksi işaretli gözlem sayısı da $n_2 = 17$ 'dir. Toplam dizilim sayısı ise $k = 5$ 'tir.

Dizilim Sınaması

- Verilen tanımlara göre ve $n_1 > 10$ ve $n_2 > 10$ varsayımları altında ardışık kalıntılar, eğer gerçekten bağımsızlarsa, aşığıda verilen ortalama ve varyans ile normal dağılıma uyarlar:

$$E(k) = \frac{2n_1n_2}{n} + 1$$
$$\sigma_k^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n - 1)}$$

- Buna göre, eğer $[E(k) - 1,96\sigma_k \leq k \leq E(k) + 1,96\sigma_k]$ ise rastsalılık sıfır önsavı %95 güvenle reddedilmez.

Durbin-Watson d Sınaması

- Özilihtiyi bulmak için kullanılan en yaygın sına, Durbin ve Watson tarafından geliştirilmiş olan d sınamasıdır.
- Bu sınamanın üstünlüğü bağlanım çözümlemesi sırasında hep hesaplanan \hat{u}_t 'lara dayanmasıdır:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=n} \hat{u}_t^2}$$

- Yukarıdaki formül, basitçe ardışık kalıntıların fark kareleri toplamının KKT'ye oranını göstermektedir.
- Fark alma sırasında bir gözlem kaybedildiği için istatistiğin payında $n - 1$ gözlem bulunduğuna dikkat ediniz.
- Gretl gibi ekonometri yazılımları bağlanım çıktıları arasında Durbin-Watson d değerini de öntanımlı olarak verir.

Durbin-Watson d Sınaması

- Durbin-Watson d istatistiği alışık olduğumuz normal, t , χ^2 ve F dağılımlarına uymaz.
- X değerleri ile olan karmaşık bağılılığı yüzünden d 'nin olasılık dağılımını türetmek zordur.
- Bu nedenle, bu sınamaya ait özilintinin olmadığı yönündeki sıfır önsavının reddedilmesine ya da reddedilmemesine götüren tek bir eşik değeri yoktur.
- Onun yerine, gözlem sayısı n ile sabit terim hariç açıklayıcı değişken sayısı k 'ya bağlı bir alt sınır d_a ve bir üst sınır d_u bulunmaktadır.
- $n = \{6, \dots, 200\}$ ve $k = \{1, \dots, 20\}$ aralıkları için d_a ve d_u değerleri Durbin ve Watson tarafından hesaplanmış ve bir çizelge olarak yayınlanmıştır.

Durbin-Watson d Sınaması

- Durbin-Watson d istatistiği 0 ile 4 sınırları içinde yer alır.
- Bunu göstermek için d 'yi şöyle yazalım:

$$d = \frac{\sum \hat{u}_t^2 + \sum \hat{u}_{t-1}^2 - 2 \sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

- \hat{u}_t^2 ile \hat{u}_{t-1}^2 arasında yalnızca bir gözlemlilik fark olduğu için ikisi yaklaşık olarak birbirine eşittir. Buna göre:

$$d \approx 2 \left(1 - \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2} \right)$$

- Şimdi, ρ 'nun bir tahmincisi olarak örneklem birinci derece öziliti katsayısını şöyle tanımlayalım:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

- Tanım gereği $-1 \leq \rho \leq 1$ olduğu için $0 \leq d \leq 4$ olur.
- Hesaplanan d istatistiği 0'a yakınsa aynı yönlü, 4'e yakınsa da ters yönlü öziliti olma olasılığı yüksektir.
- Eğer $d = 2$ dolaylarında ise, öziliti olmadığı varsayılabilir.

Durbin-Watson d Sınamasının Adımları

Durbin-Watson sınavasının adımları şöyledir:

- 1 SEK bağlanımı bulunur.
- 2 Kalıntılar kullanılarak d istatistiği hesaplanır.
- 3 Örneklem büyüklüğü n 'ye ve açıklayıcı değişken sayısı k 'ya göre d_a ve $d_{\bar{u}}$ kritik değerleri bulunur.
- 4 Aşağıdaki çizelgede verilen karar kuralları uygulanır:

Çizelge: Durbin-Watson d Sınaması Karar Kuralları

| Sıfır Önsavı | Karar | Durum |
|-------------------------|-------------|---------------------------------------|
| Aynı yönlü özilinti yok | Reddedilir | $0 < d < d_a$ |
| Aynı yönlü özilinti yok | Karar Yok | $d_a \leq d \leq d_{\bar{u}}$ |
| Özilinti yok | Reddedilmez | $d_{\bar{u}} < d < 4 - d_{\bar{u}}$ |
| Ters yönlü özilinti yok | Karar Yok | $4 - d_{\bar{u}} \leq d \leq 4 - d_a$ |
| Ters yönlü özilinti yok | Reddedilir | $4 - d_a < d < 4$ |

Kiplemeli d Sınaması

- Yaygın olarak kullanılan d sınavasının önemli bir aksaklığı, sonucun kimi zaman kararsızlık bölgesine düşebilmesidir.
- Ancak, çoğunlukla $d_{\bar{u}}$ üst sınırının yaklaşık olarak gerçek anlamlılık sınırı olduğu bulunmuştur.
- Dolayısıyla bulunan d değeri eğer kararsızlık bölgesinde olur ise, “**kipllemeli**” (modified) d sınavası karar kuralları uygulanır:

Çizelge: Kiplemeli Durbin-Watson d Sınaması Karar Kuralları

| Sıfır Önsavı | Karar | Durum |
|-------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| $H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho > 0$ | α düzeyinde reddedilir | $d < d_{\bar{u}}$ |
| $H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho \neq 0$ | $\alpha/2$ düzeyinde reddedilir | $d_{\bar{u}} < d < 4 - d_{\bar{u}}$ |
| $H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho < 0$ | α düzeyinde reddedilir | $4 - d_{\bar{u}} < d$ |

Kiplemeli d Sınaması

Yaygın olarak kullanılan Durbin-Watson sınavasının gerisinde yatan şu üç varsayıma dikkat edilmelidir:

- 1 Açıklayıcı değişkenler olasılıksal-dışı olmalıdır. Diğer bir deyişle, bağlayanlara ait değerlerin tekrarlı örneklemede değişmiyor olması gereklidir.
- 2 u_t hataları normal dağılıma uymalıdır. Öte yandan d istatistiğinin büyük örneklemlerde ölçün normal dağılıma uyduğunu göstermek de olanaklıdır.
- 3 Bağımlı değişkenin gecikmelerinin açıklayıcı değişken(ler) olarak modelde bulunmaması gereklidir. Bu, sınavanın uygulanmasında son derece önemlidir.

Breusch-Godfrey Sınaması

Durbin-Watson'a almaşık bir diğer sınahtı Breusch-Godfrey sınahtıdır. “Lagrange çarpanı” (Lagrange multiplier), kısaca “LÇ” (LM) sınahtı da denen bu yöntemin özellikleri şunlardır:

- Bu sınahtı, açıklayıcı değişkenler arasında *Y*'nin gecikmeli değerlerinin olduğu durumda da kullanılabilir.
- u_t bozukluk terimi *p*'inci dereceden bir “hareketli ortalama” (moving average) sürecine uysa bile uygulanabilir:

$$u_t = \epsilon_t + \lambda_1 \epsilon_{t-1} + \lambda_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \lambda_p \epsilon_{t-p}$$

- Birinci derece özilihtin anlamında $p = 1$ ise, sınahtı Durbin *m* sınahtı adını alır.
- BG sınahtısının bir sakıncası, gecikme uzunluğu *p*'nin önsel olarak belirlenememesidir.

Breusch-Godfrey Sınamasının Adımları

BG sınamasını açıklamak için, hata teriminin p 'inci derece özbağlanımsal tasarıma göre türediğini düşünelim:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \epsilon_t$$

Sınama adımları aşağıdaki gibidir:

1. Bağılanım SEK ile tahmin edilip kalıntılar elde edilir.
2. \hat{u}_t 'ların ilk modeldeki açıklayıcı değişkenler ve 1. adımdaki kalıntıların gecikmeli değerleri olan $\hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \dots, \hat{u}_{t-p}$ ek değişkenlerine göre bağılanımı bulunur ve R^2 hesaplanır.
3. $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$ sıfır önsavı ve büyük örneklem varsayımı altında şu geçerlidir:

$$(n - p) \cdot R^2 \sim \chi_p^2$$

4. Bulunan değer kritik χ^2 değerini aşıyorsa H_0 reddedilir.

Ders Planı

- 1 Özilintinin Niteliği
 - Özilintinin Nedenleri
 - Özilintinin SEK Tahminlerine Etkisi
- 2 Özilintiyi Saptamak
 - Çizim Yöntemi ve Dizilim Sınaması
 - Durbin-Watson d Sınaması
 - Breusch-Godfrey Sınaması
- 3 Özilintiyi Düzeltmek
 - ρ Biliniyorsa
 - ρ Bilinmiyorsa

Düzeltilici Önlemler

- Özilintinin yol açabildiği ciddi sonuçları düşünülduğünde, sorun var olduğu zaman düzeltilici bazı önlemler alınmasının gerekli olduğu da açıktır.
- Bozukluk terimi u_t gözlenemediği için, özilintinin niteliğini anlamak çeşitli uygulamalı yöntemlere konu olur.
- Genel olarak u_t 'nin birinci derece özbağlanımsal tasarım AR(1)'e uyduğu varsayılır:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

- Burada $|\rho| < 1$ 'dir. ϵ_t ise SEK varsayımlarına uymaktadır.
- Sorun çoğu zaman GEK yöntemi yardımı ile çözülebilse de çözümde izlenecek yol ρ 'nun bilinip bilinmediğine bağlı olarak değişir.

ρ Biliniyorsa

- ρ 'nun değerinin bilindiği durumda, AR(1) sorunu GEK yöntemi ile çözülebilir. İki değişkenli modele dönelim:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Yukarıdaki denklemin $t - 1$ dönemi için yazılmış şeklini ρ katsayısı ile çarpalım:

$$\rho Y_{t-1} = \rho \beta_1 + \rho \beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

- İkinci denklemleri birinciden çıkartırsak şunu elde ederiz:

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1})$$

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + \epsilon_t$$

- Bu denkleme **“genellemeli fark denklemi”** (generalized difference equation) adı verilir.
- ϵ_t tüm SEK varsayımlarını karşıladığı için, dönüştürmeli Y^* ve X^* değişkenlerine SEK uygulanarak EDYT özelliği gösteren tahminçiler elde edilebilir.

Prais-Winsten Dönüştürmesi

- Gösterilen fark denklemi, tüm gözlemlerin kendilerinden bir önceki değerlerinden ρ oranı kadarını çıkartmakla bulunur.
- Ancak bu işlem sırasında ilk gözlem kaybedilmektedir.
- Bu kaybı engellemek amacıyla Prais-Winsten dönüşümü uygulanabilir.
- Buna göre Y ve X 'in ilk değerleri şöyle dönüştürülür:

$$Y_1 \sqrt{1 - \rho^2} \quad \text{ve} \quad X_1 \sqrt{1 - \rho^2}$$

- Bu dönüştürmenin özellikle küçük örneklerde bağlanım sonuçlarını etkileyeceğine dikkat edilmelidir.

Birinci Fark Yöntemi

- ρ değiştirgesi 0 ile ± 1 aralığında yer aldığına göre, $+1$ ve -1 uç değerlerini tartışmakta yarar vardır.
- Eğer $\rho = +1$ ise genellemeli fark denklemini “birinci fark” (first-difference) denklemine şöyle indirgenir:

$$\begin{aligned}(Y_t - Y_{t-1}) &= \beta_2(X_t - X_{t-1}) + (u_t - u_{t-1}) \\ \Delta Y_t &= \beta_2 \Delta X_t + \epsilon_t\end{aligned}$$

- Yukarıdaki denkleminde sabit terim olmadığına dikkat ediniz.
- Almaşık olarak, içinde genel eğilim değişkeni t olan modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 t + u_t$$

- Bu durumda birinci fark denklemini şöyle olur:

$$\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_t + \beta_3 + \epsilon_t$$

- Burada β_3 sabit terimi, tüm değişkenlerin etkisi göz önüne alındıktan sonra Y 'nin zaman içindeki eğilimini gösterir.

Birinci Fark Yöntemi

- İktisadi serilerde çok sık görülmeyen ters yönlü tam öziliti durumunu ele alalım.
- Eğer $\rho = -1$ olursa, genellemeli fark denklemi şu olur:

$$\begin{aligned} (Y_t + Y_{t-1}) &= 2\beta_1 + \beta_2(X_t + X_{t-1}) + \epsilon_t \\ \frac{(Y_t + Y_{t-1})}{2} &= \beta_1 + \beta_2 \frac{X_t + X_{t-1}}{2} + \frac{\epsilon_t}{2} \end{aligned}$$

- Yukarıdaki model bir hareketli ortalamanın değerine göre bağlanımını bulduğu için, **“iki dönemli hareketli ortalama”** (two period moving average) bağlanımı diye adlandırılır.

Berenblutt-Webb Sınaması

- Birinci fark dönüştürmesi uygulamada yaygındır. Ancak kullanılabilmesi için önce $\rho = +1$ varsayımı sınanmalıdır.
- Bu doğrultuda, aşağıda gösterilen Berenblutt-Webb g istatistiği kullanılabilir:

$$g = \sum_{t=2}^n \hat{e}_t^2 / \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2$$

- \hat{u}_t burada ilk modeldeki SEK kalıntılarını göstermektedir.
- \hat{e}_t ise $\rho = 1$ iken (sıfır noktasından geçen) birinci fark bağlanımından gelen kalıntılardır.
- Özgün modelde sabit terim bulunması şartıyla, g istatistiği sınanırken Durbin-Watson çizelgeleri kullanılır.
- Sıfır önsavı ise Durbin-Watson'inkinin tersine $\rho = 1$ 'dir.

d İstatistiğini Kullanmak

- ρ 'nun bilinmesi ender bir durum olduğu için, uygulamada genellikle tahmin yoluna gidilir.
- Eğer ρ bilinmiyorsa, bu katsayıyı tahmin etmenin bir yolu Durbin-Watson sınaama istatistiği d 'yi kullanmaktır.
- Daha önce saptamış olduğumuz şu ilişkiyi anımsayalım:

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

- Buna göre aşağıdaki yaklaşıklık geçerlidir:

$$\hat{\rho} \approx 1 - (d/2)$$

- Demek ki d istatistiği bize ρ 'yu tahmin etmeye yönelik bir başparmak hesabı sunmaktadır.
- Yukarıdaki ilişkinin yaklaşık olduğu ve özellikle de küçük örneklem için doğru olmayabileceğine dikkat edilmelidir.

İki Aşamalı Durbin Yöntemi

İki Aşamalı Durbin yöntemini açıklamak için genellemeli fark denklemini şu şekilde yazalım:

$$Y_t = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2 X_t - \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Durbin, ρ 'yu tahmin etmek için şu iki adımlı süreci önermiştir:

- 1 Yukarıdaki çoklu bağlantım modeli hesaplanır ve Y_{t-1} 'in katsayısı, tahmin edilen $\hat{\rho}$ olarak ele alınır.
Bu değer ρ 'nun yanlı olmakla birlikte tutarlı bir tahminidir.
- 2 $\hat{\rho}$ bulunduktan sonra ise GEK yöntemi uygulanır.
Diğer bir deyişle, $Y_t^* = (Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1})$ ve $X_t^* = (X_t - \hat{\rho} X_{t-1})$ dönüştürmeleri yapılır ve SEK bağlantımı hesaplanır.

Cochrane-Orcutt Süreci

- Kalıntıları kullanarak ρ 'yu tahmin etmenin uygulamada sıklıkla yararlanılan bir yolu, Cochrane-Orcutt sürecidir.
- Bu “**yinelemeseli**” (iterative) hesaplama yöntemi istatistikçi Cochrane ve Orcutt tarafından 1949 yılında bulunmuştur.
- İşlemi açıklamak için şu iki değişkenli modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Bozukluk terimi u_t 'nin aşağıdaki AR(1) tasarımından türediğini de ayrıca varsayalım:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

(... devam)

Cochrane-Orcutt Sürecinin Adımları

Cochrane-Orcutt sürecinin adımları aşağıdaki gibidir:

- 1 Bağılanım SEK ile tahmin edilip kalıntılar elde edilir.
- 2 \hat{u}_t kalıntıları kullanılarak şu bağılanım hesaplanır:

$$u_t = \hat{\rho}\hat{u}_{t-1} + v_t$$

- 3 $\hat{\rho}$ kullanılarak genellemeli fark bağılanımı elde edilir:

$$(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) = \beta_1(1 - \hat{\rho}) + \beta_2(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho}u_{t-1})$$

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2^*X_t^* + \epsilon_t^*$$

- 4 $\hat{\rho}$ 'nın ρ 'nun en iyi tahmini olduğu önsel olarak bilinemediği için, $\hat{\beta}_1^*$ ve $\hat{\beta}_2^*$ değerlerinden yeni bir kalıntı yöneyi bulunur:

$$u_t^{**} = Y_t - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^*X_t$$

- 5 Yeni u_t^{**} 'lar yardımı ile ρ 'nun ikinci tur tahmini $\hat{\rho}$ bulunur:

$$u_t^{**} = \hat{\rho}\hat{u}_{t-1}^{**} + w_t$$

- 6 ρ 'nun yinelemeseli tahminleri arasındaki fark yeterince küçülene kadar bu işleme devam edilir.

Diğer Yöntemler

- $\hat{\rho}$ 'yı bulmak için kullanılan diğer bazı yöntemler şunlardır:
 - İki adımlı Cochrane-Orcutt süreci
 - Hildreth-Lu arama süreci
 - Doğrusal-dışı EO yöntemi
- Kavuşmazsal ya da büyük örneklerde bu yöntemler aşağı yukarı benzer sonuçlar vermektedir.
- Sonlu ya da küçük örneklerde ise elde edilen sonuçlar seçilen yönteme göre önemli değişiklikler gösterebilir.
- Uygulamada en yaygın kullanılan yöntem ise yinelemesiz Cochrane-Orcutt sürecidir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan **Bölüm 12** “Autocorrelation” okunacak.

Önümüzdeki Ders

Ekonometrik Modelleme