İki Değişkenli Bağlanım Modelinin Uzantıları

Yrd. Doç. Dr. A. Talha YALTA

Ekonometri 1 Ders Notları

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

Ders Planı

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım

Kuram bazen modelde sabit terimin bulunmamasını öngörür:

$$Y_i = \beta_2 X_i + u_i$$

Sıfır noktasından geçen bağlanım modelinin uygun olduğu bazı durumlar şunlardır:

- "sermaye varlığı fiyatlama modeli" (capital asset pricing model) ya da kısaca "SVFM" (CAPM),
- Milton Friedman'ın "kalıcı gelir önsavı" (permanent income hypothesis),
- "Maliyet çözümlemesi kuramı" (cost analysis theory),
- Enflasyon oranının para arzındaki değişim ile orantılı olduğunu ileri süren para kuramı çeşitlemeleri.

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım

Sıfır noktasından geçen bağlanım için ÖBİ aşağıdaki gibidir:

$$Y_i = \hat{\beta}_2 X_i + \hat{u}_i$$

Yukarıdaki modele ait $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincisi şu şekilde bulunur:

Alışılmış Model

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$
$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2}$$

$\beta_1 = 0$ Modeli

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$
$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum X_i^2}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-1}$$

- Yukarıdaki büyük ve küçük harf kullanımına dikkat ediniz.
- Kısaca, $\beta_1 = 0$ modeli formüllerinde ortalamalardan sapma yerine X ve Y'lerin asıl değerlerini kullanıyoruz.

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım

Sabit terimsiz modelin iki özelliğinin bilinmesinde yarar vardır:

1. Bu modellerde $\sum \hat{u}_i$ kalıntı toplamı her zaman sıfır olmak zorunda değildir.
2. Bu modellerde kalıntı kareleri toplamı, toplam kareleri toplamından küçük olmak zorunda değildir.

   Bu nedenle, alışıldık modeller için hesaplanan belirleme katsayısı r^2 sıfır noktasından geçen bağlanımlarda zaman zaman eksi değerler alabilir ve kullanılması uygun değildir.

   Sabit terimsiz modellerde "ham" (raw) r^2 kullanılabilir:

Ham r^2

$$\text{ham } r^2 = \frac{(\sum X_i Y_i)^2}{\sum X_i^2 \sum Y_i^2}$$

Ham r^2 de 0 ve 1 arasındadır ama diğer r^2 ile karşılaştırılamaz.

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım

- Önsel dayanaklar çok güçlü olmadığı sürece sabit terimin modele eklenmesinde yarar vardır.
- Eğer modele sabit terim eklenir ve bu terim istatistiksel olarak anlamlı bulunmazsa, zaten elde sıfır noktasından geçen bir bağlanım modeli var demektir.
- Diğer yandan, gerçekte modelde sabit terim varken sabit terimsiz model yakıştırılmaya çalışılırsa "model belirtim hatası" (model specification error) yapılmış olur.

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım Açıklayıcı Örnek

- Sıfır noktasından geçen bağlanıma bir örnek olarak, Güz 2007 döneminde TOBB ETÜ ekonometri öğrencilerinin arasınav ve dönem sonu sınav notu sıralamalarını alalım:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

- Burada
  - Y öğrencinin dönem sonu sınavında kaçıncı olduğunu,
  - X öğrencinin arasınavda kaçıncı olduğunu

  göstermektedir.
- Tekil öğrencilere ilişkin motivasyon değişikliği ya da özel durumlar gibi rastsal kabul edilebilecek etmenler dışında sıralamanın değişmeyeceğini varsaymak yanlış olmaz.
- Bu durumda önsel beklentimiz $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ olmasıdır.

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım Açıklayıcı Örnek

- Bu modeli sıfır noktasından geçen bağlanım olarak hesaplarsak aşağıdaki bulguları elde ederiz:

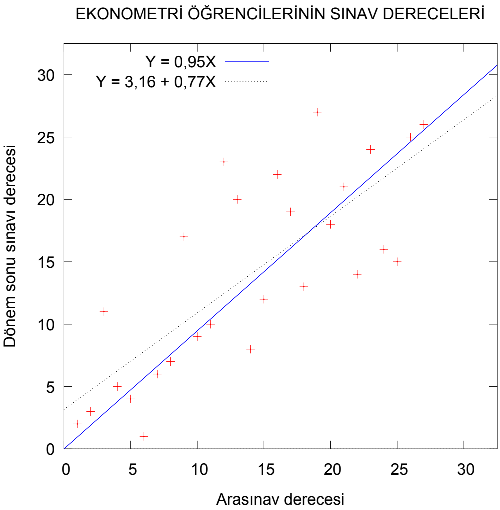
$$\begin{array}{rll} \hat{Y}_i = & 0{,}9466 & X_i \\ \text{öh} & (0{,}0632) & \\ t & (14{,}9721) & \text{ham } r^2 = 0{,}8961 \end{array}$$

- Sabit terimsiz bağlanımın uygun olup olmadığını sınamak için alışılmış bağlanıma da bakalım:

$$\begin{array}{rllll} \hat{Y}_i = & 3{,}1624 & + & 0{,}7741 & X_i \\ \text{öh} & (2{,}0284) & & (0{,}1266) & \\ t & (1{,}5591) & & (6{,}1142) & r^2 = 0{,}5992 \end{array}$$

- İlk bağlanımda $\hat{\beta}$, 1'e oldukça yakındır. İkinci bağlanımda sabit terimin sıfır olduğu sıfır önsavı reddedilmez.
- Eğer baştaki varsayımımız doğru ise, r^2'den dolayı, rastsal etmenlerin başarıda %10 etkili olduğunu söyleyebiliriz.

Sıfır Noktasından Geçen Bağlanım Açıklayıcı Örnek



Ders Planı

Ölçekleme ve Ölçü Birimleri

Bağlanım çözümlemesinde dikkat edilmesi gereken bir nokta da "verileri ölçekleme" (data scaling) konusudur.

Verilerin ölçeklenmesi ile ilgili iki önemli soru şudur:

1. X ve Y değişkenlerinin ölçü birimleri bağlanım bulgularını etkiler mi?
2. Bağlanım çözümlemesi için ölçü biriminin seçilmesinde izlenilmesi gereken bir yol var mıdır?

Ölçekleme ve Ölçü Birimleri

Türkiye'ye ait aşağıda verilen 1987 fiyatları ile gayrisafi sabit sermaye oluşumu ve gayrisafi yurtiçi hasıla verilerine bakalım:

Çizelge: Türkiye'de Sabit Sermaye Oluşumu ve GSYH (1987–2000)

Yıl	GSSSO (milyon TL)	GSSSO (milyon TL)	GSYH (milyar TL)	GSYH (milyar TL)
1987	18.491	74.416	0.018491	0.074416
1988	18.299	76.143	0.018299	0.076143
1989	18.701	76.364	0.018701	0.076364
1990	21.670	83.371	0.021670	0.083371
1991	21.764	84.271	0.021764	0.084271
1992	23.147	88.893	0.023147	0.088893
1993	29.247	96.391	0.029247	0.096391
1994	24.577	91.600	0.024577	0.091600
1995	26.823	97.729	0.026823	0.097729
1996	30.598	104.940	0.030598	0.104940
1997	35.137	112.892	0.035137	0.112892
1998	33.768	116.541	0.033768	0.116541
1999	28.473	111.083	0.028473	0.111083
2000	33.281	119.147	0.033281	0.119147

Ölçekleme ve Ölçü Birimleri

Ortaya atmış olduğumuz iki soruyu yanıtlayabilmek için aşağıda verilen bağlanım bulgularını inceleyelim:

Hem GSSSO, hem GSYH milyon TL:

$$\begin{array}{lllll} \widehat{GSSSO}_t = & -8{,}76891 & + \; 0{,}364933 & GSYH_t & \\ & (2{,}73489) & \;\; (0{,}0283565) & & r^2 = 0{,}9324 \end{array}$$

Hem GSSSO, hem GSYH milyar TL:

$$\begin{array}{lllll} \widehat{GSSSO}_t = & -0{,}00876891 & + \; 0{,}364933 & GSYH_t & \\ & (0{,}00273489) & \;\; (0{,}0283565) & & r^2 = 0{,}9324 \end{array}$$

GSSSO milyon dolar, GSYH milyar TL:

$$\begin{array}{lllll} \widehat{GSSSO}_t = & -8{,}76891 & + \; 364{,}933 & GSYH_t & \\ & (2{,}73489) & \;\; (28{,}3565) & & r^2 = 0{,}9324 \end{array}$$

GSSSO milyar dolar, GSYH milyon TL:

$$\begin{array}{lllll} \widehat{GSSSO}_t = & -0{,}00876891 & + \; 0{,}000364933 & GSYH_t & \\ & (0{,}00273489) & \;\; (0{,}0000283565) & & r^2 = 0{,}9324 \end{array}$$

Not: Ölçünlü hatalar parantez içerisinde verilmiştir.

Ölçekleme ve Ölçü Birimleri

- Bağlanım bulgularının dördü de GSYH'deki bir milyon liralık bir değişimin GSSSO'de ortalama 0,364933 milyon liralık bir değişime yol açtığını göstermektedir.
- Öyleyse, SEK tahmincilerinin bilinen özellikleri farklı ölçü birimlerinin kullanılmasından etkilenmemektedir.
- Öte yandan, bağlanım hesapları bilgisayar kullanılarak yapıldığı için, verilerin uygun biçimde ölçeklendirilmesi uygulamada zaman zaman önemli olabilir.

Sayısal Hesaplama Sorunları

- Ekonometri, birçok karmaşık matematiksel ve istatistiksel yöntem içeren bir bilim dalıdır.
- Ancak çoğu araştırmacı çeşitli tekniklerin yalnızca birkaç fare tıklaması ile uygulanabileceği izlenimini taşımaktadır.
- Bilgisayar yazılımlarının her zaman sayısal olarak tutarlı olduğunu varsaymak hatalı bir yaklaşımdır.
- Günümüz bilimsel yazılımlarının çoğu tüm hesaplamalarda 64bit "kayan nokta" (floating point) aritmetik kullanmaktadır.
- Bu altyapı gerçel sayı sistemini tümüyle karşılayamayarak dört tür hataya yol açabilmektedir:

  "Yuvarlama hataları" (rounding errors)
  "İptal etme hataları" (cancellation errors)
  "Budama hataları" (truncation errors)
  "Çözümyolu hataları" (algorithm errors)

Yuvarlama Hataları

- Yuvarlama hatası, bazı sayıların bilgisayarların kullandığı ikili düzende tam olarak gösterilememesinden kaynaklanır.
- Örnek olarak 0,1 ondalık sayısının ikili düzende gösterimi $0{,}0\overline{0011}$'dir. Bu sayı yeniden ondalık sisteme çevrildiğinde 0,09999999403953 olur.
- Bu nedenle, cebirsel olarak birbirine eşdeğer olan $(p = q)$ ve $(p - q = 0)$ gibi iki denklem bilgisayarda uygulandığında farklı sonuçlar verebilmektedir.

İptal Etme Hataları

- İptal etme hatası, yuvarlama hatasının özel bir durumudur. Gözlemlerde fazla sayıda sabit öncül basamak olduğunda ortaya çıkar.
- Bu özelliği gösteren veri setlerine "katı" (stiff) veri seti denir.
- Örnek olarak 1,000,000,001 sayısından 1,000,000,000 çıkarılınca geriye yalnızca en sağdaki tek basamak kalır.
- Baştaki sayının büyüklüğünden dolayı, bu son basamak yuvarlama hatalarına fazla duyarlıdır.

Budama Hataları

- Budama hatası, "yinelemesel" (iterative) işlemlerde görülen ve yazılımdan zorunlu olarak kaynaklanan bir hata türüdür.
- Örnek olarak $\exp(x)$ işlevi $x = 1$ noktasında aşağıdaki gibi genişletilir:

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e$$

- Görüldüğü gibi, "oransız sayı" (irrational number) *e*'nin hesaplanabilmesi sonsuz sayıda toplama gerektirmektedir.
- Ancak bilgisayar hesaplaması sınırlı sayıda işlem içerebilir ve sonuçta bir budama hatası ortaya çıkar.

Çözümyolu Hataları

- Çözümyolu hatası, bir problemin çoğu zaman birden fazla şekilde çözülebileceği gerçeğinden kaynaklanır.
- Sonuçta bazı çözümler diğerlerinden daha iyidir.
- Örnek olarak, doğrusal SEK modelini hesaplamak için kullanılabilecek yöntemlerden bazıları şunlardır:

  "Gaussçu eleme" (Gaussian elimination)
  "Tekil değer ayrıştırması" (singular value decomposition)
  "Cholesky çarpanlaması" (Cholesky factorization)
  "QR çarpanlaması" (QR factorization)

- Bunlar içinde QR yöntemi, çoklueşdoğrusal veriler dışında diğerlerine göre daha güvenilir sonuçlar vermektedir.

Sayısal Hesaplama Sorunları Özet

Özetle, sayısal hesaplama sorunlarına ilişkin dikkat edilmesi gereken noktalar şunlardır:

- Bilgisayar matematiğinin kağıt-kalem matematiğinden tümüyle farklı olduğu unutulmamalıdır.
- Sayısal hataları azaltmanın kolay yolu, çözümleme öncesi verileri uygun şekilde ölçeklemektir.
- Tüm verileri öntanımlı olarak $[0, 1)$ ya da $[0,10)$ aralıklarına göre ölçeklemek doğru bir yaklaşımdır.
- Çok büyük ve çok küçük sayıları birlikte kullanmanın hatalı sonuçlara davetiye çıkarmak olduğu unutulmamalıdır.
- Ayrıca araştırmacı çalışmasında yalnızca veri kaynaklarını belirtmekle yetinmemeli, verilerin nasıl ölçüldüğünü ve ölçeklendiğini de mutlaka açıklamalıdır.

Ders Planı

Bağlanım Modellerinin İşlev Biçimleri

- "Doğrusallık" (linearity) kavramının değişkenlerde doğrusallık ve değiştirgelerde doğrusallık olmak üzere iki ayrı şekilde tanımlandığını anımsayalım.
- KDBM için değiştirgelerde doğrusallık zorunlu olsa da değişkenlerde doğrusallık zorunlu değildir.
- Öyleyse, değişkenlerde doğrusal-dışı ama değiştirgelerde doğrusal olan ya da uygun dönüştürmelerle doğrusal yapılabilen modelleri KDBM ile tahmin etmek olanaklıdır.
- Bu bağlamda ele alacağımız model biçimleri şunlardır:

"Log-doğrusal model" (log-linear model)
"Yarı-logaritmasal model" (semi-logarithmic model)
"Evrik model" (reciprocal model)
"Log-evrik model" (log-reciprocal model)

Log-Doğrusal Model

- "Üstel" (exponential) bağlanım modeli diye adlandırılan aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$$

- Yukarıdaki gösterim aşağıdaki şekilde doğrusallaştırılabilir:

$$\begin{aligned} \ln Y_i &= \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i \\ &= \alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i \end{aligned}$$

- Bu model, α ve β_2 anakütle katsayılarında doğrusaldır ve SEK yöntemiyle aşağıdaki gibi tahmin edilebilir:

$$Y_i^* = \alpha + \beta_2 X_i^* + u_i$$

- Burada $Y_i^* = \ln Y_i$ ve $X_i^* = \ln X_i$'dir.

Log-Doğrusal Model

- Her iki yanının logaritması alınarak doğrusallaştırılmış modellere "log-doğrusal" (log-linear), "log-log" (log-log) ya da "çifte-log" (double-log) modeller adı verilir.
- Log-doğrusal modeldeki $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincileri, başta gördüğümüz doğrusal modellerde olduğu gibi EDYT'dirler.
- Ancak $\hat{\beta}_1 = \text{antilog}(\hat{\alpha})$ biçiminde tahmin edildiği için $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_1$'nın yanlı bir tahmincisidir.
- Birçok uygulamada sabit terim ikinci derecede önemli olduğundan, $\hat{\beta}_1$'in yanlı olmasına aldırılmayabilir.

Log-Doğrusal Model

Log-doğrusal modelin yaygınlığına yol açan çekici özelliği, β_2 eğim katsayısının Y'nin X'e göre esnekliğini vermesidir:

Doğrusal Model

$$Y_i = \alpha + \beta_2 X_i + u_i$$

Eğim (birim değişim):

$$\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}X_i} = \beta_2$$

Esneklik (yüzde değişim):

$$\frac{\mathrm{d}Y_i/Y_i}{\mathrm{d}X_i/X_i} = \frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}X_i}\frac{X_i}{Y_i} = \beta_2 \frac{X_i}{Y_i}$$

Log-doğrusal Model

$$Y_i = \exp(\alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i)$$

Eğim (birim değişim):

$$\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}X_i} = \exp(\alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i)\beta_2 \frac{1}{X_i} = \beta_2 \frac{Y_i}{X_i}$$

Esneklik (yüzde değişim):

$$\frac{\mathrm{d}Y_i/Y_i}{\mathrm{d}X_i/X_i} = \frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}X_i}\frac{X_i}{Y_i} = \left(\beta_2 \frac{Y_i}{X_i}\right)\frac{X_i}{Y_i} = \beta_2$$

- Bu özelliğinden dolayı log-doğrusal model "sabit esneklik" (constant elasticity) modeli diye de adlandırılır.

Log-Doğrusal Model Açıklayıcı Örnek

- Örnek olarak kahve talebi modeline bakalım.
- Veriler üzerinde log-log doğrusallaştırması yapıldıktan sonra hesaplanan bağlanım şu sonuçları vermektedir:

$$\begin{array}{llll}
\widehat{\ln Y_i} = & 0{,}7774 & -\ 0{,}2530\ \ln X_i & \\
\text{öh} & (0{,}0152) & (0{,}0494) & r^2 = 0{,}7448 \\
t & (51{,}1447) & (-5{,}1214) & F_{1,9} = 26{,}23
\end{array}$$

- Fiyat esnekliği katsayısı $-0{,}25$ olarak bulunmuştur.
- Buna göre kahve fiyatında yüzde 1 artış olması durumunda kahve tüketiminin ortalama yüzde 0,25 azalması beklenir.
- Öyleyse kahve talebinin kendi fiyatına göre esnek olmadığı söylenebilir.

Log-Doğrusal Model Açıklayıcı Örnek

- Zaman zaman doğrusal ve log-doğrusal model arasında bir seçim yapmak gerekli olabilir.
- Bağımlı değişkenler aynı olmadığı için, böyle bir durumda iki r^2 değerini doğrudan karşılaştırma yoluna gidilemez.
- Katsayı tahminlerini karşılaştırma konusunda ise $\beta_2(\bar{X}/\bar{Y})$ tanımından yararlanılarak doğrusal model için bir ortalama esneklik hesaplanabilir.
- Kahve talebi örneğinde, log-log modelden elde edilen β_2 esneklik katsayısı $-0{,}25$ iken, doğrusal modelin ortalama esnekliği de benzer biçimde $-0{,}22$ olarak bulunur.
- Dikkat: $\beta_2(\bar{X}/\bar{Y})$ kullanılarak bulunan ortalama esneklik farklı $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ değerlerine bağlıdır. Log-doğrusal modelin esneklik katsayısı β_2 ise her fiyat düzeyinde aynıdır.

Log-Doğ Modeli

- Ekonomistler sık sık para arzı, istihdam, GSYH gibi değişkenlerin büyüme oranlarının tahmini ile ilgilenirler.
- Bileşik faiz formülünü anımsayalım:

$$Y_t = Y_0(1 + r)^t$$

- Burada r, Y'nin zaman içindeki (bileşik) büyüme hızıdır. Yukarıdaki denklemin logaritmasını alalım:

$$\ln Y_t = \ln Y_0 + t \ln(1 + r)$$

- $\beta_1 = \ln Y_0$ ve $\beta_2 = \ln(1 + r)$ tanımlamalarını yapıp hata terimini de ekledikten sonra modeli şöyle yazabiliriz:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

- Yukarıda gösterilen modele "log-doğ" (log-lin) modeli denir.

Log-Doğ Modeli

Bu noktada, sık sık karşılaştığımız "mutlak değişim" (absolute change), "göreli değişim" (relative change) ve "yüzde değişim" (percentage change) terimleri arasındaki farka dikkat edelim:

Mutlak değişim	Göreli değişim	Yüzde değişim
ΔX	$\Delta X/X$	$100 \times \Delta X/X$

Eğer X'deki değişim küçükse, aşağıda gösterilen "yaklaştırma" (approximation) uygulamada sıklıkla kullanılır:

$$\Delta \ln X \approx \Delta X/X \quad \text{(göreli değişim)}$$

Log-Doğ Modeli

- Log-doğ modeline geri dönelim:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

- Bu modelde β_2 katsayısı, açıklayıcı değişken t'deki mutlak bir değişmeye karşılık Y'deki göreli değişimi ölçmektedir:

$$\beta_2 = \frac{\Delta \ln Y}{\Delta t}$$

- Diğer bir deyişle, β_2 katsayısı Y_t değişkenindeki büyüme hızını ($\beta_2 > 1$) ya da küçülme hızını ($\beta_2 < 1$) vermektedir.
- Bu nedenle, log-doğ modeline aynı zamanda "sabit büyüme" (fixed growth) modeli de denir.

Log-Doğ Modeli Açıklayıcı Örnek

Reel GSSSO örneğine dönersek, log-doğ modeline dayanan bağlanım bulgularının aşağıdaki gibi olduğunu görürüz:

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{\text{GSSSO}}_t = & 2{,}8516 & + \; 0{,}0509 \; t & \\
\text{öh} & (0{,}0517) & (0{,}0061) & \\
t & (55{,}1830) & (8{,}3932) & r^2 = 0{,}8544
\end{array}
$$

- Buna göre, 1987-2000 döneminde Türkiye'de gayri safi sabit sermaye oluşumu yılda ortalama yüzde 5,09'dur.
- Ayrıca, $\ln Y_0 = 2{,}8516$'nın anti-logaritmasını alırsak bulacağımız 17,3155 değeri de 1987 yılı için GSSSO'nun yaklaşık 17,3 milyon TL olarak tahmin edildiğini gösterir.

Doğrusal Eğilim Modeli

- Araştırmacılar kimi zaman log-doğ modeli yerine aşağıdaki modeli tahmin ederler:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

- ln Y_t yerine Y_t'nin zamana göre bağlanımının hesaplandığı bu modele "doğrusal eğilim" (linear trend) modeli denir.
- Buradaki t, "eğilim" (trend) değişkeni diye adlandırılır.
- Eğer β_2 eğim katsayısı artı çıkarsa Y_t'de zaman içinde bir artış eğilimi, eksi çıkarsa da bir düşüş eğilimi var demektir.

Doğrusal Eğilim Modeli

Log-doğ ve doğrusal eğilim modellerine ilişkin iki noktayı özellikle belirtmekte yarar vardır:

1. İki modelin bağımlı değişkenleri farklı olduğu için bu modellerin r^2 değerlerini karşılaştırmak doğru değildir.
2. Bağımlı değişkenin zaman içinde değişiminin bu şekilde incelenmesi ancak zaman serisinin "durağan" (stationary) olması durumunda uygundur.

Durağanlık kavramı ileride zaman serileri ekonometrisi konusu altında incelenecektir.

Doğrusal Eğilim Modeli Açıklayıcı Örnek

GSSSO örneğimize geri dönelim ve şimdi de doğrusal eğilim modelini tahmin edelim:

$$\begin{array}{lcccl} \widehat{\text{GSSSO}}_t = & 16{,}3621 & + & 1{,}2848 & t \\ \text{öh} & (1{,}4170) & & (0{,}1664) & \\ t & (11{,}5466) & & (7{,}7202) & r^2 = 0{,}8324 \end{array}$$

- Buna göre, 1987-2000 döneminde Türkiye'de reel GSSSO yılda yaklaşık 1,3 milyon TL olarak gerçekleşmiştir.
- Demek ki bu dönemde reel GSSSO'da artış eğilimi vardır.

Doğ-Log Modeli

- Eğer X'deki yüzde değişime karşılık Y'deki mutlak değişim ile ilgileniyorsak, buna uygun bir modeli şöyle yazabiliriz:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

- Yukarıdaki modele "doğ-log" (lin-log) modeli denir.
- Bu modelde β_2 katsayısını kullanarak şunu gösterebiliriz:

$$\beta_2 = \frac{\Delta Y}{\Delta X / X} \quad \Rightarrow \quad \Delta Y = \beta_2 (\frac{\Delta X}{X})$$

- Böylece X'deki 0,01 (yüzde 1) oranındaki göreli değişmeye karşı Y'de $\beta_2 \times 0{,}01$ boyutunda mutlak değişme olmaktadır.
- Dolayısıyla, doğ-log modelini yorumlarken eğim katsayısı β_2'yi önce 0,01 ile çarparız.

Doğ-Log Modeli Açıklayıcı Örnek

Örnek olarak 1987-2006 yıllarında Türkiye'deki GSYH ve M2 para arzı verilerini kullanarak doğ-log modelini tahmin edelim:

$$\begin{array}{llll}
\widehat{\text{GSYH}}_t = & -26{,}7905 & + \; 41{,}9796 \; \ln \text{M2}_t & \\
\text{öh} & (13{,}6546) & (4{,}2488) & \\
t & (-1{,}9620) & (9{,}8805) & r^2 = 0{,}8443
\end{array}$$

- 41,98 büyüklüğündeki eğim katsayısının anlamı, örneklem döneminde para arzındaki yüzde 1'lik bir artışın GSYH'de ortalama 0,4198 milyon liralık artışa yol açmış olduğudur.

Evrik Model

- Aşağıda gösterilen türden modellere evrik model denir:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_i} + u_i$$

- Yukarıdaki model, X değişkeni modele evrik girdiğinden, X'te doğrusal değildir ama β_1 ve β_2'de doğrusaldır.
- Modelin önemli özelliği, X sonsuza yaklaşırken Y'nin de β_1 "kavuşmazsal" (asymptotic) değerine yakınsamasıdır.
- Dolayısıyla, evrik modellerde açıklayıcı değişken artarken bağımlı değişkenin yaklaştığı bir limit değeri bulunur.
- Bu tür modellere örnek olarak Phillips eğrisi ya da üretimin ortalama sabit gider ile olan ilişkisi verilebilir.

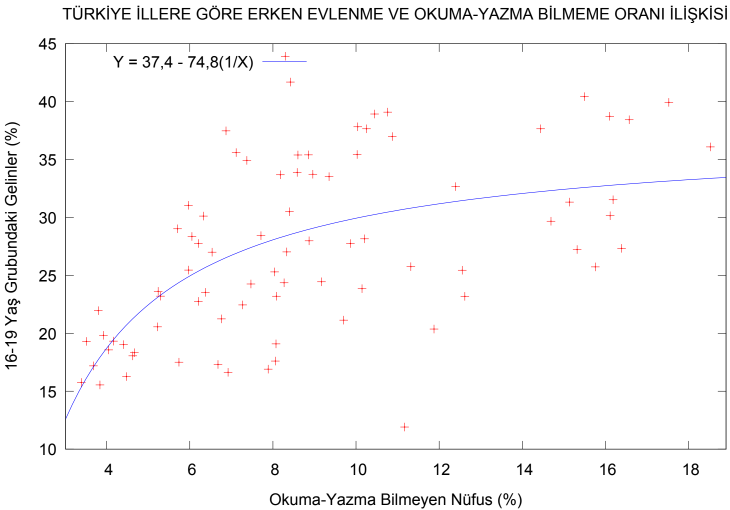
Evrik Model Açıklayıcı Örnek

Bir evrik model uygulaması olarak 2009 yılında Türkiye'de illere göre 16-19 yaş grubundaki gelinlerin oranı (Y) ile okuma yazma bilmeyenlerin toplam nüfusa oranı (X) verilerine bakalım:

$$\begin{array}{llllll}
\widehat{Y}_i = & 37{,}4131 & - & 74{,}7805 & 1/X_i & \\
\text{öh} & (1{,}7221) & & (11{,}7015) & & r^2 = 0{,}3408 \\
t & (21{,}7253) & & (-6{,}3907) & & F_{1,79} = 40{,}8407
\end{array}$$

- Buna göre erken evliliklerde tavan oran yaklaşık %36,7'dir.
- Şöyle ki $X = \%100$ ve $1/X = 0{,}01$ olunca 16-19 yaşında evlenen bayanların oranı da % $(37{,}4131 - 0{,}7478)$ olur.
- Dikkat: Gelir gibi diğer önemli etmenleri de göz önüne alan bir modelde bu kavuşmazsal oran daha düşük çıkacaktır.

Evrik Model Açıklayıcı Örnek



Log-Evrik Model

- Evrik modelin bir türü olan "log-evrik" (log-reciprocal) model aşağıdaki biçimi alır:

$$\ln Y_i = \beta_1 - \beta_2 \frac{1}{X_i} + u_i$$

- Türev hesabı kullanılarak burada Y'nin X'e göre eğimi $\mathrm{d}/\mathrm{d}X(\ln Y_i) = \beta_2(1/X_i^2)$ olarak bulunur.
- Model çizim üzerinde incelendiğinde de X artarken Y'deki artışın önce dışbükey ve daha sonra da içbükey görünüm sergilediği anlaşılır.
- Öyleyse böyle bir model sermaye sabitken üretimin önce artarak arttığı ve sonra da azalarak arttığı üretim-işgücü ilişkisini çözümlemede kullanılabilir.

İşlev Biçiminin Seçimi

Ele almış olduğumuz çeşitli model işlev biçimlerine ilişkin eğim ve esneklik bilgileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge: Çeşitli İşlev Biçimlerinin Eğim ve Esneklikleri

Model	İşlev Biçimi	Eğim ($\frac{dY}{dX}$)	Esneklik ($\frac{dY}{dX}\frac{X}{Y}$)
Doğrusal	$Y = \beta_1 + \beta_2 X$	β_2	$\beta_2 \frac{X}{Y}$
Log-Log	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2 \left(\frac{Y}{X}\right)$	β_2
Log-Doğ	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 X$	$\beta_2(Y)$	$\beta_2(X)$
Doğ-Log	$Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$	$\beta_2 \left(\frac{1}{Y}\right)$
Evrik	$Y = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$	$-\beta_2 \left(\frac{1}{X^2}\right)$	$-\beta_2 \left(\frac{1}{XY}\right)$
Log-Evrik	$\ln Y = \beta_1 - \beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$	$\beta_2 \left(\frac{Y}{X^2}\right)$	$\beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$

İşlev Biçiminin Seçimi

Görgül çalışmalarda model seçiminin deneyim gerektirdiği açıktır. Yardımcı olabilecek birkaç nokta şunlardır:

1. Bazı durumlarda iktisat kuramı belli bir işlev biçimini gösterebilir ya da öngörebilir.
2. Tahmin edilen katsayıların önsel beklentileri karşıladığı doğrulanmalıdır.
3. Almaşık modelleri karşılaştırmak için eğim ve esneklik katsayılarını hesaplamak yardımcı olabilir.
4. Veri setine iki farklı model yakıştırıldığında, eğer bağımlı değişkenler aynı ise r^2 değerleri karşılaştırılabilir.
5. Ancak iki modeli r^2 temelinde karşılaştırmak her zaman uygun değildir. Bunun bir nedeni, eklenen her açıklayıcı değişkenin r^2'yi yükseltecek olmasıdır.

Toplamalı ya da Çarpmalı Hata Terimi

İşlev biçiminin seçimine ilişkin olarak, aşağıdaki hata terimsiz bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2}$$

Bu modeli tahmin amacıyla üç farklı şekilde yazabiliriz:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} u_i$$

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$$

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} + u_i$$

İki yanlı logaritmalarını alırsak da şunları elde ederiz:

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_i + \ln u_i$$

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

$$\ln Y_i = \ln(\beta_1 X_i^{\beta_2} + u_i)$$

- Yukarıda görülen $\alpha = \ln \beta_1$'dir.
- İlk iki model değiştirgelerde doğrusalken, üçüncü modelin özünde doğrusal-dışı olduğuna dikkat ediniz.

Toplamalı ya da Çarpmalı Hata Terimi

- SEK'in EDYT özelliğinin hatalarda sıfır ortalama ve sabit varyans aradığını anımsayalım.
- Ayrıca önsav sınaması için u_i'lerin normal dağılımlı olduğu, kısaca $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsayılmaktadır.
- Buna göre, örneğimizdeki ikinci modeli kullanmak istersek $\ln u_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsaymamız gereklidir.
- Ancak eğer $\ln u_i \sim N(0, \sigma^2)$ ise, ilk modeldeki u_i de $e^{\sigma^2/2}$ ortalama, $e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ varyansla log-normal dağılımlı olur.
- Üçüncü model ise değiştirgelerde doğrusal-dışı olduğu için ancak yinelemesel bir yöntem ile çözülebilir.
- Sonuç olarak, modeli bağlanım için dönüştürürken hata terimine özel bir dikkat göstermek gereklidir.
- Hatalı doğrusallaştırma, arzulanan istatistiksel özellikleri taşımayan bir modele yol açabilir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan Bölüm 6 “Extensions of the Two-Variable Regression Model” okunacak.

Önümüzdeki Ders

Çoklu Bağlanım Çözümlemesi: Tahmin Sorunu