İstatistiksel Kavramların Gözden Geçirilmesi

Yrd. Doç. Dr. A. Talha YALTA

Ekonometri 1 Ders Notları

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

Ders Planı

Anlamlı Basamaklar

Anlamlı Basamaklar

Ondalık bir sayının "anlamlı basamakları" (significant digits), o sayının kesinlik ve doğruluğuna katkıda bulunan tüm basamaklarını gösterir.

- Veri ve ölçümleri elde etmek için çeşitli süreç ve işlemler kullanılabilmektedir.
- Eğer eldeki ölçüme ait bazı rakamlar, o ölçümü elde etmek için kullanılan sürecin doğruluk sınırı dışındaysa, bunları kullanmanın anlamı yoktur.
- Örnek olarak, kol saatimize bakıp "saat 10:18:37:3" demek anlamlı değildir. Saat 10:18'dir.

Anlamlı Basamakları Belirleme Kuralları

1. Sıfır olmayan tüm basamaklar anlamlıdır.
   Örnek: 123456 sayısının anlamlı basamak sayısı altıdır.
2. İki sıfır-dışı basamak arasındaki tüm sıfırlar anlamlıdır.
   Örnek: 103,406 sayısının anlamlı basamak sayısı altıdır.
3. Baştaki sıfırlar anlamsızdır.
   Örnek: 000012 ve 0,012 için anlamlı basamak sayısı ikidir.
4. Ondalık ayraç içeren sayılarda sondaki sıfırlar anlamlıdır.
   Örnek: 1,20300 için anlamlılık düzeyi altı basamaktır.
5. Tam sayılarda sondaki sıfırlar anlamlı ya da anlamsız olabilir.
   Örnek: $(10\bar{0}00)$, $(10\underline{0}00)$, (1230000) ve (100,) sayıları için anlamlılık düzeyi üçtür. Sonuncu örnekte ondalık ayraçının anlamlılık düzeyini vurgulamak için kullanılmış olduğuna dikkat ediniz.

Bilimsel Gösterim

- "Bilimsel gösterim" (scientific notation), baştaki ve sondaki anlamlı olmayan sıfırları kullanmayarak anlamlı basamak sayısındaki olası bir karışıklığı önlemeyi hedefler.
- Kısaca bilimsel gösterimde tüm basamaklar anlamlıdır.
- "Üstel gösterim" (exponential notation) adı da verilen bilimsel gösterimde tüm sayılar $a \times 10^b$ biçiminde yazılır.
- Burada b bir tam sayıdır. a ise $1 \leq |a| < 10$ olan bir "oranlı sayı" (rational number) biçimindedir.
  Örnek: 0,00123 bilimsel gösterimi $1{,}23 \times 10^{-3}$'tür.
  Örnek: 0,0012300 bilimsel gösterimi $1{,}2300 \times 10^{-3}$'tür.
  Örnek: 1230000 eğer dört basamağa kadar anlamlı ise $1{,}230 \times 10^6$ diye gösterilir.
  Örnek: Üç basamağa kadar anlamlıysa da $1{,}23 \times 10^6$ olur.
- Dikkat: Bilimsel gösterimde, baştaki oranlı sayının her zaman 1 ile 10 arasında olduğuna dikkat ediniz.

Yuvarlama Kuralları

"Yuvarlama" (rounding) kavramı anlamlı basamak kavramı ile yakından ilişkilidir.

Çeşitli hesaplamalarda sıradan yuvarlama yerine "istatistikçi yuvarlaması" (statistician's rounding) yöntemini kullanmak, sonuçların yukarı "yanlı" (biased) olmasını önlemede gereklidir:

1. Tutulacak son basamak seçilir. Bir sonra gelen basamak eğer < 5 ise tutulacak basamak değişmez.
   Örnek: $1{,}2345$ sayısı üç basamağa yuvarlanırsa $1{,}23$ olur.
   Örnek: 1230000 iki basamağa yuvarlanırsa 1200000 olur.
2. Bir sonraki basamak > 5 ise tutulacak basamak bir artırılır.
   Örnek: $0{,}126$ sayısı iki basamağa yuvarlanırsa $0{,}13$ olur.
3. Bir sonra gelen basamak $= 5$ ise; tutulacak basamak tek sayıysa bir artırılır, çift sayıysa değiştirilmez.
   Örnek: 13500 sayısı iki basamağa yuvarlanırsa 14000 olur.
   Örnek: $0{,}125$ sayısı iki basamağa yuvarlanırsa $0{,}12$ olur.

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Anlamlı Basamaklar ve Aritmetik

Anlamlı basamaklar ile ilgili olarak, veri ve ölçümler arası aritmetik işlemlerinde aşağıdaki kurallar uygulanır:

1. Öncelikle, örnek olarak 0,12 gibi bir değerin gerçekte 0,115 ile 0,125 arasında olduğu unutulmamalıdır.
2. Toplama ve çıkarma işlemlerinde sonuç, girdiler içinde en az ondalık basamak içeren sayı ile aynı ondalık basamak sayısında olacak şekilde yuvarlanmalıdır.
   Örnek: $0{,}12 + 0{,}1277$ yanıtı 0,2477 değil 0,25 olmalıdır.
3. Çarpma ve bölme işlemlerinde sonuç, girdiler içindeki en az anlamlı basamak içeren sayı ile aynı anlamlılık düzeyinde olmalıdır.
   Örnek: $0{,}12 \times 1234$ yanıtı 148,08 değil 150 olmalıdır.
4. Ancak ara işlemlerde izleyici basamakları elde tutmak gereklidir. Böylece yuvarlama hataları azaltılmış olur.

Ders Planı

Örneklem Uzayı ve Örneklem Noktası

Örneklem Uzayı ve Örneklem Noktası

"Rastsal" (random) bir deneyin olabilecek tüm sonuçlarına "örneklem uzayı" (sample space), bu örneklem uzayının her bir üyesine de "örneklem noktası" (sample point) denir.

- Örnek: İki madeni para ile yazı-tura atma deneyinin 4 örneklem noktalı bir örneklem uzayı vardır:

$$Y = \{\text{YY, YT, TY, TT}\}$$

Rastsal Olay ve Karşılıklı Dışlamalı Olay

Rastsal Olay

Rastsal bir deneye ait örneklem uzayının olası her bir alt kümesine "rastsal olay" (random event) denir.

- Örnek: Bir yazı ve bir tura gelmesi olayı: {YT, TY}

Karşılıklı Dışlamalı Olay

Bir olayın gerçekleşmesi diğer bir olayın oluşmasını önlüyorsa, bu iki olay "karşılıklı dışlamalı" (mutually exclusive) olaylardır.

- Örnek: {YY, YT, TY} ve {TT} karşılıklı dışlamalıdır.

Rastsal Değişken

Rastsal Değişken

Değerleri rastsal bir deney sonucu belirlenen değişkene "rastsal değişken" (random variable) ya da kısaca "rd" (rv) denir.

- Rastsal değişkenler genellikle X, Y, Z gibi büyük harflerle ve aldıkları değerler de x, y, z gibi küçük harflerle gösterilir.
- Rastsal bir değişken ya "kesikli" (discrete) ya da "sürekli" (continuous) olur.
- Kesikli bir rd ancak sonlu sayıda farklı değerler alabilir.
  Örnek: Zar.
- Sürekli bir rd ise belli bir aralıkta her sayısal değeri alabilir.
  Örnek: Rastsal olarak seçilmiş bir kişinin boyu.

Olasılık

Olasılık

A, örneklem uzayındaki bir olay olsun. Rastsal deney sürekli yinelendiğinde, A olayının gerçekleşme sıklık oranına A olayına ait "olasılık" (probability) denir, $P(A)$ ya da $Prob(A)$ ile gösterilir.

- $P(A)$ aynı zamanda "göreli sıklık" (relative frequency) olarak da adlandırılır.

Olasılığın Özellikleri

$P(A)$ gerçek değerli bir "işlev" (function) olup, şu özellikleri taşır:

1. Her A için $0 \leq P(A) \leq 1$'dir. ($1 = \%100$)
2. $A, B, C, \ldots$ örneklem uzayını oluşturuyorsa şu geçerlidir:
$$P(A + B + C + \ldots) = 1$$
3. A, B ve C karşılıklı dışlamalı olaylar ise şu geçerlidir:
$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Örnek: Altı yüzlü bir zarı atma deneyi düşünelim:
Bu deneyde örneklem uzayı= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ biçimindedir ve
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$'dır.
Ayrıca, $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ olur.

Kesikli Olasılık Yoğunluk İşlevi

Kesikli Bir Değişkenin Olasılık Yoğunluk İşlevi

X değişkeni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gibi ayrık değerler alan bir rd olsun.

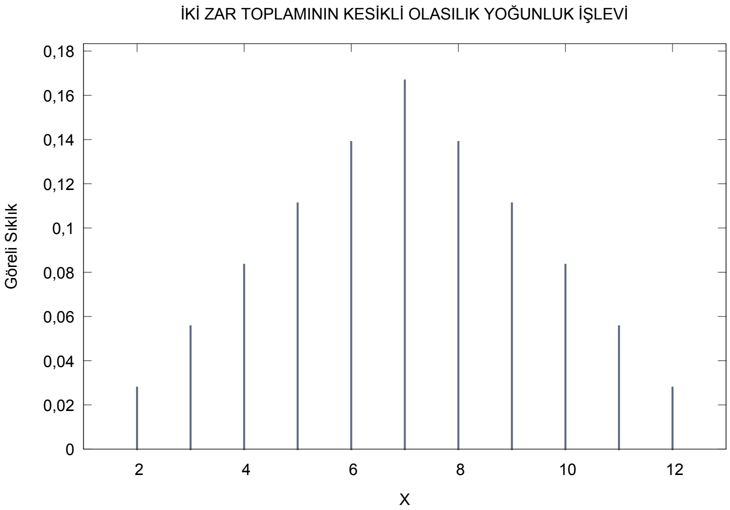
$$\begin{aligned} f(x) &= P(X = x_i) \quad & i = 1, 2, \ldots, n \text{ için} \\ &= 0 & X \neq x_i \text{ için} \end{aligned}$$

işlevine X'e ait "kesikli olasılık yoğunluk işlevi" (discrete probability density function) denir.

- Örnek: İki zar atıldığında zarların toplam değerini gösteren kesikli rastsal değişken X, 11 farklı değer alabilir:

$$x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$
$$f(x) = \{\tfrac{1}{36}, \tfrac{2}{36}, \tfrac{3}{36}, \tfrac{4}{36}, \tfrac{5}{36}, \tfrac{6}{36}, \tfrac{5}{36}, \tfrac{4}{36}, \tfrac{3}{36}, \tfrac{2}{36}, \tfrac{1}{36}\}$$

Kesikli Olasılık Yoğunluk İşlevi Örnek



Sürekli Olasılık Yoğunluk İşlevi

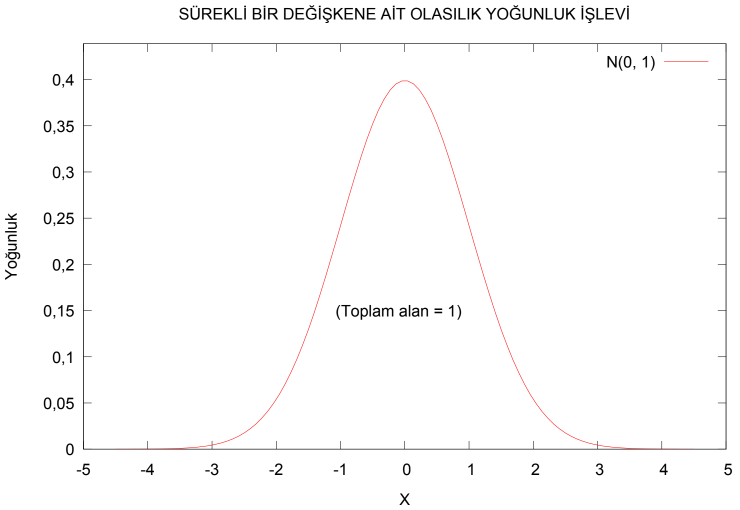
Sürekli Bir Değişkenin Olasılık Yoğunluk İşlevi

X sürekli bir rd olsun.

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 1, \\
\int_{a}^{b} f(x)dx &= P(a \leq x \leq b)
\end{aligned}
$$

Eğer yukarıdaki koşullar sağlanırsa, $f(x)$'e X'in "sürekli olasılık yoğunluk işlevi" (continuous probability density function) denir.

Sürekli Olasılık Yoğunluk İşlevi Örnek



Birleşik Olasılık Yoğunluk İşlevi

Birleşik Olasılık Yoğunluk İşlevi

X ve Y iki kesikli rd olsun.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= P(X = x_i \wedge Y = y_j), \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad X \neq x_i \wedge Y \neq y_j \text{ için} \end{aligned}$$

işlevi, "kesikli birleşik olasılık yoğunluk işlevi" (discrete joint probability density function) adını alır.

- Birleşik OYİ, X'in x_i değerini ve Y'nin de y_j değerini aynı anda almasının birleşik olasılığını gösterir.

Birleşik Olasılık Yoğunluk İşlevi Örnek

- Aşağıdaki çizelgede X ve Y kesikli değişkenlerine ait bir birleşik OYİ gösterilmektedir:

		X		
		1	**2**	**3**
Y	**0**	0,2	0,3	0,1
	1	0,1	0,1	0,2

- Buna göre $X = 2$ değerini aldığında $Y = 0$ olma olasılığı $f(2, 0) = 0{,}3$ ya da diğer bir deyişle %30'dur.
- Tüm olasılıklar toplamının 1 olduğuna dikkat ediniz.

Marjinal Olasılık Yoğunluk İşlevi

Marjinal Olasılık Yoğunluk İşlevi

$f(x, y)$ birleşik OYİ'sine ilişkin olarak $f(x)$ ve $f(y)$ işlevlerine "marjinal olasılık yoğunluk işlevi" (marginal probability density function) adı verilir:

$$f(x) = \sum_y f(x, y) \quad X\text{'in marjinal OYİ'si}$$
$$f(y) = \sum_x f(x, y) \quad Y\text{'nin marjinal OYİ'si}$$

Marjinal Olasılık Yoğunluk İşlevi Örnek

- Önceki örnekteki verileri ele alalım. X'in marjinal OYİ'si:

$$
\begin{array}{rclclcl}
f(x=1) & = & \sum_y f(x=1,y) & = & 0{,}2+0{,}1 & = & 0{,}3 \\
f(x=2) & = & \sum_y f(x=2,y) & = & 0{,}3+0{,}1 & = & 0{,}4 \\
f(x=3) & = & \sum_y f(x=3,y) & = & 0{,}1+0{,}2 & = & 0{,}3 \\
 & & & & & + & \\
\hline
 & & & & & & 1{,}0
\end{array}
$$

- Aynı şekilde Y'nin marjinal OYİ'si de aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{array}{rclclcl}
f(y=0) & = & \sum_x f(y=0,x) & = & 0{,}2+0{,}3+0{,}1 & = & 0{,}6 \\
f(y=1) & = & \sum_x f(y=1,x) & = & 0{,}1+0{,}1+0{,}2 & = & 0{,}4 \\
 & & & & & + & \\
\hline
 & & & & & & 1{,}0
\end{array}
$$

İstatistiksel Bağımsızlık

İstatistiksel Bağımsızlık

X ve Y rastsal değişkenlerinin ancak ve ancak

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

çarpımı olarak yazılabilmeleri durumunda bunlara "istatistiksel bağımsız" (statistically independent) değişkenler denir.

İstatistiksel Bağımsızlık Örnek

- Örnek olarak bir torbada üzerlerinde 1, 2, 3 yazılı üç top olduğunu düşünelim. Torbadan iki top (X ve Y) yerine koyularak çekilirse, X ve Y'nin birleşik OYİ'si şöyle olur:

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & & X & \\
 & & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
Y & 2 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\
 & 3 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9}
\end{array}
$$

- Burada $f(x=1, y=1) = \frac{1}{9}$'dur.
- $f(x=1) = \sum_y f(x=1, y)$
  $= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$
- $f(y=1) = \sum_x f(x, y=1)$
  $= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

- Bu örnekte $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$ olduğuna göre, bu iki değişken istatistiksel olarak bağımsızdır diyebiliriz.

Olasılık Dağılımlarının Beklemleri

- Matematikte, bir noktalar kümesinin nasıl bir şekil gösterdiğini anlatan sayısal ölçüye "beklem" (moment) denir.
- Dolayısıyla, bir olasılık dağılımı o dağılıma ait bir dizi beklem ile özetlenebilir.
- Beklemler, "merkezi beklem" (central moment) ve "ham beklem" (raw moment) olarak ikiye ayrılır.
- En yaygın kullanılan iki beklem ise "ortalama" (mean) (μ) ve "varyans" (variance) (σ^2) olarak karşımıza çıkar.
- Ortalama, aynı zamanda "beklenen değer" (expected value) olarak da adlandırılır.

Beklenen Değer

Beklenen Değer

Kesikli bir rd olan X'e ait ortalama ya da beklenen değer $E(X)$ şöyle tanımlanır:

$$E(X) = \sum_x xf(x)$$

- Örnek olarak, iki zarın toplamını gösteren kesikli rd X'in olasılık dağılımını ele alalım:

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = 2\tfrac{1}{36} + 3\tfrac{2}{36} + 4\tfrac{3}{36} + \cdots + 11\tfrac{2}{36} + 12\tfrac{1}{36} = 7$$

- Demek ki iki zar atıldığında gözlenecek sayıların beklenen değeri 7'dir.

Beklenen Değerin Özellikleri

Beklenen değer kavramına ilişkin bazı özellikler şunlardır:

1. Sabit bir sayının beklenen değeri kendisidir.
   Örnek: Eğer $b = 2$ ise $E(b) = 2$'dir.
2. Eğer a ve b birer sabitse, $E(aX + b) = aE(X) + b$'dir.
3. Eğer X ve Y bağımsız rd ise, $E(XY) = E(X)E(Y)$'dir.
4. X, $f(X)$ olasılık yoğunluk işlevli bir rd ve $g(X)$ de X'in herhangi bir işleviyse, şu kural geçerlidir:

$$
\begin{aligned}
E[g(X)] &= \textstyle\sum_x \; g(X)f(x) && X \text{ kesikli ise,} \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} g(X)f(x)dx && X \text{ sürekli ise.}
\end{aligned}
$$

   Buna göre eğer $g(X) = X^2$ ise:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \textstyle\sum_x \; x^2 f(X) && X \text{ kesikli ise,} \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(X)dx && X \text{ sürekli ise.}
\end{aligned}
$$

Beklenen Değer Örnek

- Örnek olarak, aşağıdaki OYİ'yi ele alalım:

$$\begin{aligned} x &= \{\text{-}2, \quad 1, \quad 2\} \\ f(x) &= \{\tfrac{5}{8}, \quad \tfrac{1}{8}, \quad \tfrac{2}{8}\} \end{aligned}$$

- Buna göre X'in beklenen değeri şudur:

$$\begin{aligned} E(X) = \textstyle\sum_x xf(x) &= -2\tfrac{5}{8} + 1\tfrac{1}{8} + 2\tfrac{2}{8} \\ &= -\tfrac{5}{8} \end{aligned}$$

- Ayrıca X^2'nin beklenen değeri ise şudur:

$$\begin{aligned} E(X^2) = \textstyle\sum_x x^2 f(x) &= 4\tfrac{5}{8} + 1\tfrac{1}{8} + 4\tfrac{2}{8} \\ &= \tfrac{29}{8} \end{aligned}$$

Varyans (Değişirlik)

Varyans (Değişirlik)

X bir rd ve $E(X) = \mu$ ise, X değerlerinin beklenen değerleri etrafındaki yayılımı "varyans" (variance) ile ölçülür:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) = \sigma_X^2 &= \textstyle\sum_x \ (X-\mu)^2 f(x) && X \text{ kesikli ise,} \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx && X \text{ sürekli ise.} \end{aligned}$$

- σ_X^2'nin artı değerli kare kökü σ_X, X'e ait "ölçünlü sapma" (standard deviation) olarak adlandırılır.
- Varyans ve ölçünlü sapma, her bir rastsal x değerinin X'in ortalaması etrafında ne genişlikte bir alana yayıldığının göstergesidir.

Varyansın Özellikleri

Varyans kavramına ilişkin bazı özellikler şunlardır:

1. Sabit bir sayının varyansı sıfırdır.
2. Eğer a ve b birer sabitse, $\text{var}(aX + b) = a^2\text{var}(X)$'dir.
3. Eğer X ve Y bağımsız birer rd ise şu yazılabilir:
$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$
$$\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$
4. Eğer X ve Y bağımsız birer rd ve a, b, c de birer sabit ise, aşağıdaki kural geçerlidir:
$$\text{var}(aX + bY + c) = a^2\text{var}(X) + b^2\text{var}(Y)$$

Varyans Örnek

- Hesaplama kolaylığı bakımından varyans formülü şöyle de yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\text{var}(X) = \sigma_X^2 &= (1/n)\sum\left((X_i - E(X))^2\right) \\
&= (1/n)\sum\left(X_i^2 - 2X_iE(X) + E(X)^2\right) \\
&= \sum(X_i^2)/n - \sum 2X_iE(X)/n + \sum E(X)^2/n \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

- Buna göre önceki örnekteki rastsal değişkenin varyansı şudur:

$$\text{var}(X) = \frac{29}{8} - \left(-\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{207}{64}$$

Kovaryans (Eşdeğişirlik)

Kovaryans (Eşdeğişirlik)

X ve Y rd'lerinin ortalamaları sırasıyla $E(X)$ ve $E(Y)$ olsun. Bu iki değişkenin birlikte değişirlikleri "kovaryans" (covariance) ile ölçülür:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \sum_y \sum_x XY\, f(x,y) - E(X)E(Y) && \text{kesikliyse,} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} XY\, f(x,y)\, dxdy - E(X)E(Y) && \text{sürekliyse.} \end{aligned}$$

- Kovaryans formülü şöyle de gösterilebilir: $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Görüldüğü gibi bir değişkenin varyansı aynı zamanda kendisiyle olan kovaryansıdır.

Kovaryansın Özellikleri

Kovaryans kavramına ilişkin birkaç önemli özellik şunlardır:

1. Eğer X ve Y bağımsız rd'ler ise kovaryansları 0 olur:
$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0\end{aligned}$$
2. Eğer a, b, c, d birer sabitse şu kural geçerlidir:
$$\mathrm{cov}(a+bX, c+dY) = bd\,\mathrm{cov}(X,Y)$$
3. Bağımsız olmayan X ve Y rd'lerinin bileşimlerinin varyanslarını hesaplarken kovaryans bilgisi de gereklidir:
$$\mathrm{var}(aX+bY) = a^2\mathrm{var}(X) + b^2\mathrm{var}(Y) + 2ab\mathrm{cov}(X,Y)$$

İlinti Katsayısı

İlinti Katsayısı

"İlinti katsayısı" (correlation coefficient) iki rd arasındaki doğrusal ilişkinin bir ölçüsüdür ve $[-1, 1]$ değerleri arasında yer alır:

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- Yukarıdaki formülden şu görülebilir: $\text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$

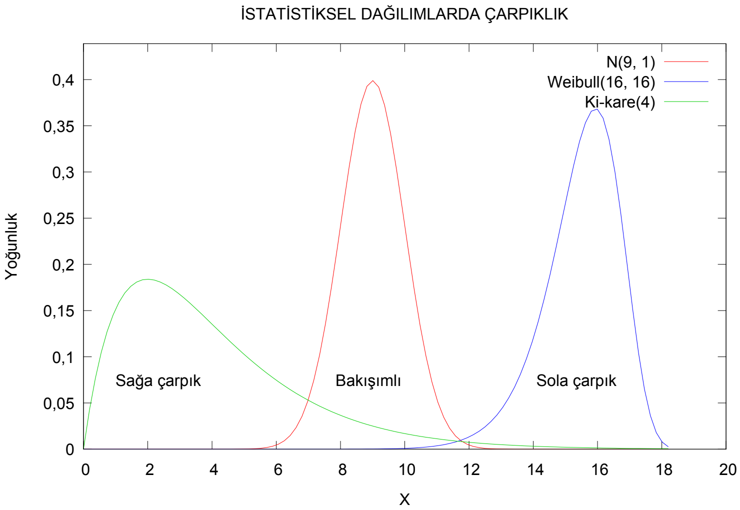
Diğer Merkezi Beklemler

- Genel olarak, $f(x)$ tek değişkenli OYİ'sinin kendi ortalaması dolayındaki merkezi beklemleri şöyle tanımlanır:

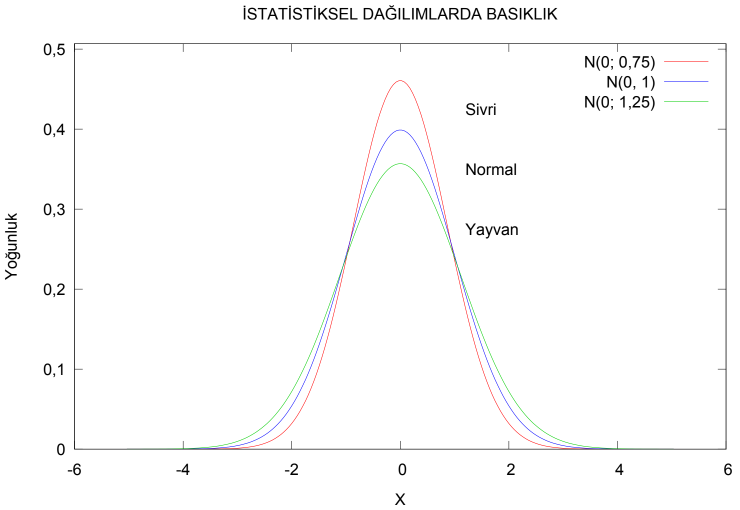
Beklem	Tanım	Açıklama
1	$E(X-\mu)$	0
2	$E(X-\mu)^2$	varyans
3	$E(X-\mu)^3$	çarpıklık
4	$E(X-\mu)^4$	basıklık
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$E(X-\mu)^n$	n. derece

- "Çarpıklık" (skewness), bakışımdan uzaklığı ölçer.
- "Basıklık" (kurtosis), yayvanlığı incelemek için kullanılır.
- Bir rastsal değişkenin normal dağılıma uyup uymadığını anlamak için çarpıklık ve basıklık değerlerine bakılabilir.

İstatistiksel Dağılımlarda Çarpıklık



İstatistiksel Dağılımlarda Basıklık



Normal Dağılım

Normal Dağılım

Ortalaması ve varyansı sırasıyla μ ve σ^2 olan “normal dağılım” (normal distribution) aşağıdaki OYİ ile gösterilir:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

- Normal dağılan bir rd, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.
- Normal eğri altında kalan alanın yaklaşık yüzde 68’i $\mu \pm \sigma$ değerleri, yüzde 95 kadarı $\mu \pm 2\sigma$ değerleri ve yüzde 99,7 kadarı da $\mu \pm 3\sigma$ değerleri arasında yer alır.

Ölçünlü Normal Dağılım

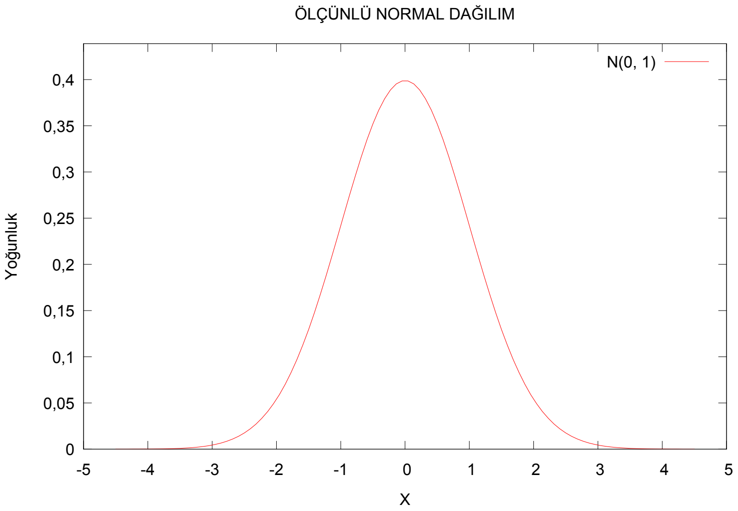
Ölçünlü Normal Dağılım

"Ölçünlü normal dağılım" (standard normal distribution) için $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$'dir ve $X \sim N(0,1)$ diye gösterilir. OYİ'si şudur:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}Z^2\right), \qquad Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

- Formülde görülen exp işlemcisi, e üzeri anlamına gelir.
- μ ve σ^2 değerleri verili ve normal dağılan X rd'si, $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ formülü ile ölçünlü normal değişken Z'ye dönüştürülür.
- Örnek: $X \sim N(8,4)$ olsun. X'in $[6,12]$ arası değerler alma olasılığı için $Z_1 = \frac{6-8}{2} = -1$ ve $Z_2 = \frac{12-8}{2} = 2$'dir. Çizelgeden $P(0 \leq Z \leq 2) = 0{,}4772$ olduğunu görürüz. Bakışım nedeniyle $P(-1 \leq Z \leq 0) = 0{,}3413$ bulunur. Demek ki istenilen olasılık $0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185$'tir.

Ölçünlü Normal Dağılım Örnek



Normal Dağılımın Özellikleri

Normal dağılıma ilişkin bazı özellikler şunlardır:

1. Normal dağılımın 3. ve 4. merkezi beklemleri şöyledir:

   $$\begin{aligned} &\text{3. merkezi beklem:} \quad E(X-\mu)^3 = 0 \\ &\text{4. merkezi beklem:} \quad E(X-\mu)^4 = 3\sigma^4 \end{aligned}$$

   Buna göre, ölçünlü normal dağılımın basıklığı 3'tür. Ayrıca çarpıklığı 0 olduğu için "bakışımlı" (symmetric) olur.
2. Normal dağılan bir rd'nin tek sayılı tüm beklemleri sıfırdır.
3. Normal rd'lerin doğrusal bileşimleri de normal dağılır.
   Örnek: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ve $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ iki bağımsız rd olsun. Eğer $Y = aX_1 + bX_2$ ise,

   $$Y \sim N\left[(a\mu_1 + b\mu_2), (a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)\right] \text{ olur.}$$

Merkezi Limit Kanıtsavı

- Normal dağılıma ilişkin önemli bir nokta da "Merkezi limit kanıtsavı" (central limit theorem) ya da kısaca "MLK" (CLT) konusudur.
- Merkezi limit kanıtsavı günümüz olasılık kuramının yapı taşlarından biridir.
- MLK'yi kısaca açıklamak için, bağımsız ve benzer şekilde dağılan (ortalama $= \mu$, varyans $= \sigma^2$) n sayıda $X_1, \ldots, X_n$ rastsal değişken varsayalım.
- Kanıtsava göre bu rd'ler, n sonsuza giderken ortalaması μ ve varyansı da σ^2/n olan normal dağılıma yakınsarlar.
- Başlangıçtaki OYİ ne olursa olsun bu sonuç geçerlidir.

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımı

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımı

$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_k$, k sayıda ölçünlü normal değişken olsun. Bu durumda

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

rastsal değişkeni, χ^2 şeklinde gösterilen "ki-kare" (chi-square) dağılımına uyar.

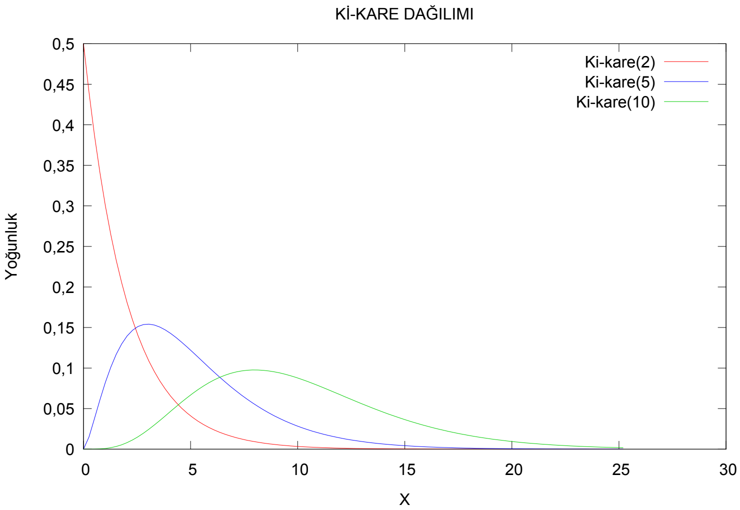
- Buradaki k değeri, ki-kare değişkenine ait "serbestlik derecesi" (degrees of freedom) ya da kısaca "sd" (df) olarak tanımlanır.

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımının Özellikleri

Ki-kare dağılımına ilişkin bazı özellikler şunlardır:

1. Ki-kare, "sağa çarpık" (right-skewed) bir dağılımdır ancak serbestlik derecesi arttıkça bakışıma yaklaşır.
2. k sd'li bir χ^2 dağılımının ortalaması k, varyansı ise $2k$'dir.
3. Eğer Z_1 ve Z_2 iki bağımsız dağılan ki-kare değişkeniyse, $Z_1 + Z_2$ toplamı da sd $= k_1 + k_2$ olan bir χ^2 değişkeni olur.

χ^2 (Ki-Kare) Dağılımı Örnek



Student T Dağılımı

Student T Dağılımı

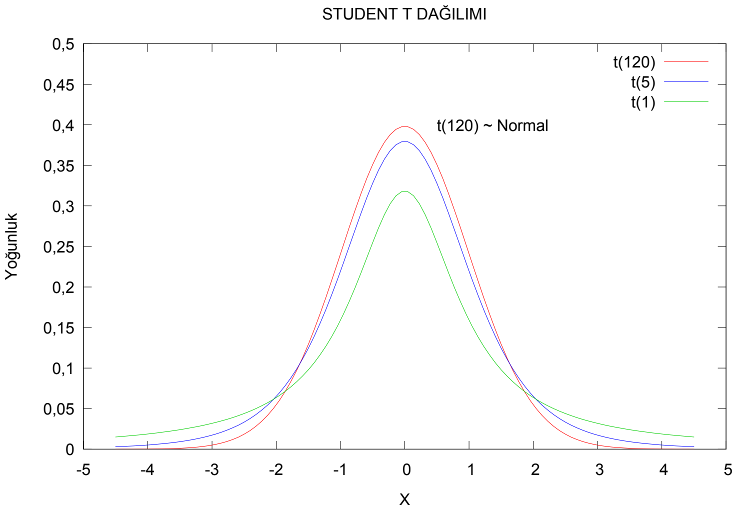
Z_1 bir ölçünlü normal değişken ve Z_2 de Z_1'den bağımsız bir ki-kare değişkeni olsun. Bu durumda:

$$t = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/k}}$$

değişkeni, k sd ile "Student *t*" (Student's *t*) dağılımına uyar.

- Neredeyse tüm çalışmalarını "Student" takma adı ile yazmış olan istatistikçi William Sealy Gosset (1876-1937) tarafından bulunmuştur.
- *t* dağılımı da normal dağılım gibi bakışımlı ancak daha basıktır. Sd'si yükseldikçe normal dağılıma yakınsar.
- Ortalaması 0, varyansı ise $k > 2$ için $k/(k-2)$'dir.

Student T Dağılımı Örnek



Fisher-Snedecor F Dağılımı

Fisher-Snedecor F Dağılımı

Z_1 ve Z_2, k_1 ve k_2 sd'li bağımsız iki ki-kare değişkeni olsun. Bu durumda:

$$F = \frac{Z_1/k_1}{Z_2/k_2},$$

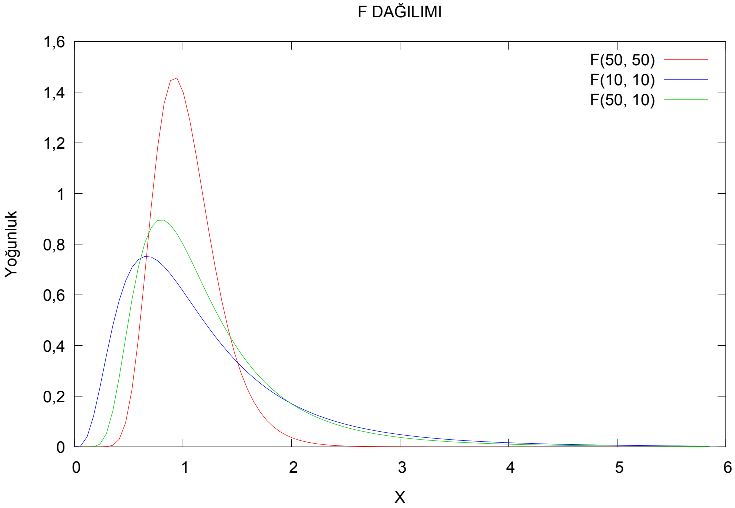
k_1 ve k_2 sd'li bir "F dağılımı" (F distribution) biçiminde dağılır.

Fisher-Snedecor F Dağılımının Özellikleri

F dağılımına ilişkin bazı özellikler ise şunlardır:

1. Ki-kare dağılımı gibi F dağılımı da sağa çarpıktır ama k_1 ve k_2 büyüdükçe F dağılımı da normale yakınsar.
2. $k_2 > 2$ için F dağılımının ortalaması şöyledir:
$$\mu = \frac{k_2}{(k_2 - 2)}$$
3. $k_2 > 4$ için F dağılımının varyansı şöyledir:
$$\sigma^2 = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_1 - 2)^2(k_2 - 4)}$$
4. F ile t dağılımları arasında şu ilişki vardır: $t_k^2 = F_{1,k}$
5. Eğer payda sd'si k_2 yeterince büyükse F ve ki-kare dağılımları arasında şu ilişki vardır: $k_1 F_{k_1,k_2} \sim \chi^2_{k_1}$

Fisher-Snedecor F Dağılımı Örnek



Ders Planı

Tahmin Sorunu

- İstatistikte bilinmeyenleri tahmin etmenin genel yolu, bilinen bir olasılık dağılımından çekilen n boyutundaki rastsal örneklem verilerini kullanmaktır.
- X, OYİ'si $f(x;\theta)$ olan bir rastsal değişken olsun.
- Burada θ, dağılıma ait herhangi bir anakütle katsayısıdır.
- Rastsal bir örneklem çekilip şöyle bir örneklem değerleri işlevi geliştirilebilir: $\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Bize θ'nın bir tahminini veren $\hat{\theta}$'ya "istatistik" (statistic) ya da "tahminci" (estimator) denir ve "teta şapka" (theta hat) diye okunur.
- "Tahmin" (estimation) denilen bu süreç iki bölüme ayrılır:

"Nokta tahmini" (point estimation)
"Aralık tahmini" (interval estimation)

Nokta Tahmini ve Aralık Tahmini

- Nokta tahmini, θ'nın tahminini tek bir değer olarak verir.
- Örnek: Eğer $\hat{\theta} = 20$ ise bu θ'nın nokta tahminidir.
- "En küçük kareler" (least squares) ve "ençok olabilirlik" (maximum likelihood) yöntemleri en yaygın kullanılan iki nokta tahmincisidir.
- Aralık tahmini ise öncelikle θ için $\hat{\theta}_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $\hat{\theta}_2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gibi iki tahminci tanımlar.
- Daha sonra, gerçek θ değerinin belli bir güvenle (olasılıkla) bulunduğu $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ aralığı tahmin edilir.
- Örnek: θ'nın %95 güven aralığı şu olabilir: $19 \leq \theta \leq 21$
- Böyle bir aralığın θ'yı içerdiği kesin olarak bilinemez. Belirlenen aralığın θ'yı içerme olasılığı ya 0'dır ya da 1'dir.
- Öyleyse, bu aralığın yorumu şudur: Eğer böyle 100 aralık hesaplanırsa, bunlardan 95'i aslında değeri bilinemeyen gerçek θ'yı içermelidir.

Arzulanan İstatistiksel Özellikler

- En küçük kareler ve ençok olabilirlik gibi tahmincilerde "arzulanan" (desired) bir takım istatistiksel özellikler vardır.
- Bunları iki kümede inceleyebiliriz:

  "küçük örneklem özellikleri" (small sample properties)
  "kavuşmazsal özellikler" (asymptotic properties)
- Küçük örneklem özellikleri, tahmincinin sınırlı sayıda gözlemden oluşan örneklemlerde taşıdığı özelliklerdir.
- Tahmincinin kavuşmazsal ya da büyük örneklem özellikleri ise örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça gözlenir.

Küçük Örneklem Özellikleri

Yansızlık

Eğer $\hat{\theta}$ gibi bir tahmincinin beklenen değeri gerçek θ'ya eşitse, bu tahminciye θ'nın "yansız" (unbiased) tahmincisi denir:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \qquad \text{ya da} \qquad E(\hat{\theta}) - \theta = 0$$

- Kuramsal olarak yansızlık, aynı büyüklükte farklı farklı örneklemler çekilip de katsayı tahmini yapılabilirse, bu tahminlerin ortalamasının giderek anakütledeki gerçek değere yaklaşacağı anlamına gelir.
- Bu durumda yansızlık bir "tekrarlı örnekleme" (repeated sampling) özelliğidir.

Küçük Örneklem Özellikleri

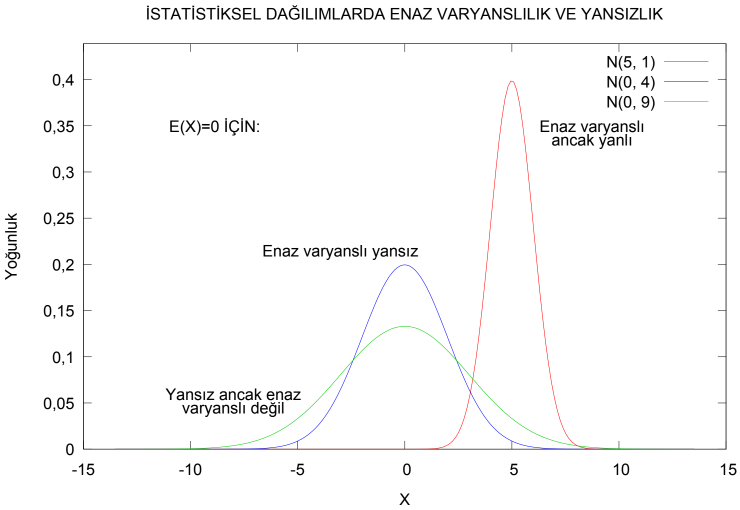
Enaz Varyanslı Tahminci

$\hat{\theta}_1$'in varyansı; θ'ya ilişkin $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \ldots$ gibi diğer tahmincilerin varyansından küçük ya da ona eşit olsun. Bu durumda, $\hat{\theta}_1$'ya "enaz varyanslı tahminci" (minimum variance estimator) denir.

Enaz Varyanslı Yansız Tahminci

$\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$, θ'nın iki yansız tahmincisi olsun. Eğer $\hat{\theta}_1$'nın varyansı $\hat{\theta}_2$'nın varyansından küçük ya da ona eşitse $\hat{\theta}_1$ tahmincisine "enaz varyanslı yansız" (minimum variance unbiased) ya da "en iyi yansız" (best unbiased) ya da "etkin" (efficient) tahminci denir.

Küçük Örneklem Özellikleri



Büyük Örneklem Özellikleri

Kavuşmazsal Yansızlık

n gözlemli bir örneklem için $\hat{\theta}_n$ tahmincisinin "kavuşmazsal yansız" (asymptotically unbiased) bir tahminci olabilmesi için θ'nın şu koşulu sağlaması gereklidir:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

- Diğer bir deyişle, örneklem büyüklüğü artarken eğer $\hat{\theta}$'nın beklenen ya da ortalama değeri gerçek θ'ya yakınsıyorsa, $\hat{\theta}$ tahmincisi kavuşmazsal yansızdır.

Büyük Örneklem Özellikleri

Tutarlılık

Örneklem büyüklüğü n artarken $\hat{\theta}$ tahmincisi θ'ya yakınsıyorsa, $\hat{\theta}$'ya "tutarlı" (consistent) tahminci denir.

- Diğer bir deyişle, tutarlı tahmincilerde n büyürken $\hat{\theta}$'nın beklenen değeri gerçek θ'ya yaklaşır ve aynı zamanda varyansı da küçülür.
- Dikkat: Yansızlık ve tutarlılık özellikleri kavramsal olarak çok farklıdır. Tutarlılık yalnızca kavuşmazsal bir özelliktir.
- Tutarlılığın yeterli koşulu örneklem sonsuza yaklaşırken hem yanlılığın hem de varyansın sıfıra doğru gitmesidir.

Büyük Örneklem Özellikleri

- $\hat{\theta}$ tahmincisinin kavuşmazsal dağılımının varyansına, $\hat{\theta}$'ya ait "kavuşmazsal varyans" (asymptotic variance) denir.

Kavuşmazsal Etkinlik

Eğer $\hat{\theta}$ tutarlıysa ve $\hat{\theta}$'nın kavuşmazsal varyansı diğer tüm tahmincilerin kavuşmazsal varyanslarından küçükse, $\hat{\theta}$'ya "kavuşmazsal etkin" (asymptotically efficient) tahminci denir.

Kavuşmazsal Normallik

Örneklem büyürken eğer $\hat{\theta}$ tahmincisinin örneklem dağılımı da normal dağılıma yakınsıyorsa, bu tahmincinin "kavuşmazsal normal" (asymptotically normal) dağıldığı söylenir.

- Kavuşmazsal normallik özelliği, merkezi limit kanıtsavının bir sonucudur.

Doğrusallık Özelliği

Doğrusallık

$\hat{\theta}$ tahmincisi eğer örneklem gözlemlerinin doğrusal bir işlevi ise, buna θ'nın "doğrusal" (linear) tahmincisi denir. Örnek olarak:

$$\hat{\theta} = (ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots) \qquad \{a, b, c, \dots\} \in R$$

tahmincisi θ'nın doğrusal bir tahmincisidir.

En iyi Doğrusal Yansız Tahminci

$\hat{\theta}$ eğer θ'nın farklı doğrusal tahmincileri arasında yansız ve enaz varyanslı tahminciyse, $\hat{\theta}$'ya "en iyi doğrusal yansız tahminci" (best linear unbiased estimator), kısaca "EDYT" (BLUE) denir.

Önsav Sınaması

Önsav sınaması konusu aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- X, OYİ'si $f(x; \theta)$ bilinen bir rastsal değişken olsun.
- Burada θ, dağılımın herhangi bir anakütle katsayısıdır.
- Genellikle gerçek θ bilinemez ancak tahmin edilebilir.
- n büyüklüğünde bir rastsal örneklem çekilerek $\hat{\theta}$ tahmincisi bulunmuş olsun.
- Önsav sınaması yöntemi kullanılarak, anakütle katsayısı θ'nın varsayılan bir θ^* değeriyle uyumluluğu sınanabilir.
- Bunun için, eldeki $\hat{\theta}$ tahmini ve bu tahminin olasılık dağılımı ile ilgili bilgi ya da varsayımlardan yararlanılır.

Sıfır Önsavı ve Almaşık Önsav

- Anakütle katsayısı θ'nın seçili bir θ^* değerine eşit olup olmadığı sınanmak isteniyor olsun.
- Bu durumda, $\theta = \theta^*$ savına "sıfır önsavı" (null hypothesis) adı verilir ve $H_0 : \theta = \theta^*$ ile gösterilir.
- Bu sıfır önsavı, $H_1 : \theta \neq \theta^*$ ile gösterilen "almaşık önsav" (alternative hypothesis) savına karşı sınanır.

I. ve II. Tür Hatalar

- Sınama sonuçları değerlendirilirken dikkatli olunmalıdır.
- Sınama sonucu bir olasılık değeri olacağı için hatalı bir karara varılması olasıdır.
- Eğer H_0 aslında doğruyken reddedilirse, buna "I. tür hata" (type I error) denir.
- Eğer H_0 aslında yanlışken reddedilmezse, buna da "II. tür hata" (type II error) denir.

Çizelge: I. ve II. Tür Hatalar

	Gerçek Durum	
Karar	H_0 Doğru	H_0 Yanlış
H_0 Reddedilir	I. tür hata	Hata yok
H_0 Reddedilmez	Hata yok	II. tür hata

Anlamlılık Düzeyi

- Yazında I. tür hata olasılığı α ile gösterilir ve "anlamlılık düzeyi" (significance level) adıyla anılır.
- Önsav sınamasına klasik yaklaşım I. tür hatanın II. türe göre daha ciddi olduğudur.
- Dolayısıyla, uygulamada α 0,01 ya da 0,05 gibi düşük bir düzeyde tutularak I. tür hata yapma olasılığı azaltılır.
- $(1-\alpha)$ değeri I. tür hatayı yapmama olasılığını gösterdiği için buna "güven katsayısı" (confidence coefficient) denir.
- Örnek olarak, eğer anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ olarak seçilmişse, güven katsayısı $(1-\alpha) = 0{,}95$ ya da %95 olur.

Anlamlılık Sınaması ve Güven Aralığı

- Önsav sınamasına iki farklı yaklaşım vardır:

  "güven aralığı" (confidence interval)

  "anlamlılık sınaması" (test of significance)
- Güven aralığı yaklaşımında, anakütle katsayısı θ için tahmin edilen $\hat{\theta}$'ya dayanan bir %100$(1-\alpha)$ aralığı kurulur ve bunun $\theta = \theta^*$ değerini içerip içermediğine bakılır.
- Eğer bulunan güven aralığı θ^*'ı içeriyorsa sıfır önsavı reddedilmez, içermiyorsa reddedilir.
- Anlamlılık sınaması yaklaşımında ise $\theta = \theta^*$ varsayımına ilişkin bir sınama istatistiği hesaplanır ve bu istatistiği elde etme olasılığının ne olduğuna bakılır.
- Eğer bu olasılık seçilen α değerinden küçükse sıfır önsavı reddedilir, büyükse reddedilmez.
- Belli bir uygulamada bu iki yaklaşım aynı sonucu verir.

Önsav Sınaması Özet

İstatistiksel bir önsavın sınanmasının adımları kısaca şöyledir:

1. Bir sınama istatistiği alınır. Örnek: $\bar{X}$
2. Sınama istatistiğinin olasılık dağılımı belirlenir.
   Örnek: $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/2)$
3. Sıfır önsavı ve almaşık önsav belirtilir.
   Örnek: $H_0 : \mu = 75, \qquad H_1 : \mu \neq 75$
4. Anlamlılık düzeyi α seçilir. Örnek: $\alpha = 0{,}05$
5. Sınama istatistiğinin olasılık dağılımından bir %$100(1 - \alpha)$ güven aralığı kurulur ya da sıfır önsavına ilişkin istatistik hesaplanarak bunu elde etmenin olasılığına bakılır.
6. Elde edilen sonuçlara göre sıfır önsavı reddedilir ya da reddedilmez. Karar verilirken her 100 deneyde 100α kez yanlış sonuç bulma riski olduğu unutulmaz.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan Appendix A "A Review of Some Statistical Concepts" okunacak.

Önümüzdeki Ders

Ekonometri Nedir?